Différentiabilité ; Fonctions de plusieurs variables réelles

Denis Vekemans *

Exercice 1 Prolonger par continuité la fonction

$$f(x,y) = \frac{\cos x - \cos y}{x - y}$$

sur la diagonale d'équation $y = x$.

Exercice 2 Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathbb{R}^3$. Etudier la différentiabilité de l'application

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \vec{x} \to \Phi(\vec{x}) = \vec{x} \wedge f(\vec{x}).$$

Exercice 3 A tout x de $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on associe $N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ et $N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. En quels point de $\mathbb{R}^n$ les applications N_1 et N_2 sont-elles différentiables ? On explicitera la différentielle lorsqu'elle existe.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 \text{ si } |x| < |y|, \\ f(x,y) = y^2 \text{ si } |x| \geq |y|. \end{cases}$$

Etudier la continuité et la différentiabilité de f dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(x,y) = (x^2 + y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) \text{ si } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Etudier la continuité et la différentiabilité de f en $(0,0)$. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles que si l'on pose $u(x,y,z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, alors on ait

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u = 0.$$

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Exercice 7 Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = kz$$

en utilisant les coordonnées polaires.

Exercice 8 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(E) : a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

où z est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1. On effectue le changement de variables H

$$\begin{cases} u(x, y) = x + \alpha y \\ v(x, y) = x + \beta y. \end{cases}$$

   $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, mais $\alpha \neq \beta$.
   Ecrire l'équation (E') transformée de (E) par H.
2. On suppose $b^2 - 4ac > 0$. Montrer qu'on peut intégrer complètement (E') puis (E).
3. On suppose $b^2 - 4ac < 0$. Montrer que (E) est équivalente à (E'') : $\Delta g = 0$ (équation de Laplace), pour une certaine fonction g.
4. On suppose $b^2 - 4ac = 0$. Montrer qu'on peut intégrer complètement (E') puis (E).

Exercice 9 Soit Φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{cases} u(x, y, z) = x + y^2 \\ v(x, y, z) = y + z^2 \\ w(x, y, z) = z + x^2. \end{cases}$$

Ceci définit localement et implicitement x, y, z comme fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de u, v, w. Calculer $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$.

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(0, 0) = 0 \\ f(x, y) = \frac{4xy(x^2 - y^2}{x^2 + y^2}) \text{ si } (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, mais non dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11 Soient x, y et z les dimensions d'un parallélipipède rectangle (pavé droit).

A volume V fixé, quelles sont les dimensions x, y et z qui minimisent la surface latérale de ce parallélipipède rectangle ?

Exercice 12 Etudier les extrema de

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; x \to f(x,y) = x[(\ln x)^2 + y^2].$$

Exercice 13 Trouver le coefficient directeur de la tangente au point de coordonnées (x,y)

- de l'ellipse d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
- du folium de Descartes d'équation cartésienne $x^3 + y^3 = 3xy$.

Exercice 14 Montrer que la relation $e^{x-y} = 1 + x + y$ définit implicitement une fonction $\Phi : x \to \Phi(x) = y$ au voisinage de $(0,0)$.

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\Phi(x)}{x^2}$.

Exercice 15 On considère un champ vectoriel du plan $\vec{V}$ donné par

$$\vec{V}(x,y,z) = (x^2 y)\vec{i} + xy\vec{j}.$$

1. Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de l'arc orienté $\overset{\hookrightarrow}{\gamma}$ de $O(0,0)$ vers $A(1,1)$ d'équation $y = x^2$.
2. Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de l'arc orienté $\overset{\hookrightarrow}{C}$ de $O(0,0)$ vers $A(1,1)$ constitué des segments orientés $[\overset{\hookrightarrow}{OI}]$ et $[\overset{\hookrightarrow}{IA}]$ avec $I(1,0)$.
3. Ce champ dérive-t-il d'un potentiel scalaire ϕ ?

Exercice 16 On considère un champ vectoriel de l'espace $\vec{V}$ donné par

$$\vec{V}(x,y,z) = (3x^2 y + y^3)\vec{i} + (x^3 + 3xy^2)\vec{j} + 6z\vec{k}.$$

1. Vérifier en la calculant qu'il existe une fonction U telle que $\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 y + y^3$, $\frac{\partial U}{\partial y} = x^3 + 3xy^2$ et $\frac{\partial U}{\partial z} = 6z$.
2. En déduire que le champ vectoriel $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire ϕ. Calculer ϕ de sorte que le potentiel soit nul à l'origine.
3. Calculer la circulation de $\vec{V}$ entre les points $A(1,0,-1)$ et $B(2,-1,3)$.

Exercice 17 Déterminer une fonction numérique $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, telle que le champ vectoriel $\vec{V}$ donné par

$$\vec{V}(x,y,z) = (1 + x^2)\Phi(x)\vec{i} + 2xy\Phi(x)\vec{j} - 3z\vec{k}$$

dérive d'un potentiel vecteur $\vec{\Omega}$ que l'on déterminera.

Exercice 18 On considère la forme différentielle

$$\omega = \frac{x^2 - y}{x^2}dx + \frac{x+1}{x}dy.$$

1. Vérifier en la calculant qu'il existe une fonction U telle que $\omega = dU$.
2. En déduire que ω est une forme différentielle exacte.

Exercice 19 On considère l'équation différentielle $(E) : (2 + 10\dfrac{y}{x^2}e^{y/x}) + y'(1 - \dfrac{10}{x}e^{y/x}) = 0$ où $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Intégrer (E) en utilisant la forme différentielle associée.
2. Représenter graphiquement l'unique solution de (E) vérifiant $y(5) = 0$

Exercice 20 On considère la forme différentielle

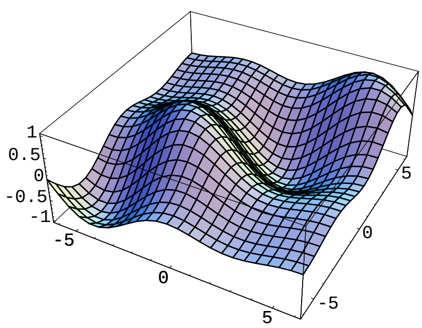
$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dx.$$

1. Dans quel domaine cette forme différentielle est-elle définie ?
2. Calculer l'intégrale curviligne $I = \int_{\overset{\hookleftarrow}{\gamma}} \omega$ où $\overset{\hookleftarrow}{\gamma}$ est le cercle trigonométrique parcouru dans le sens trigonométrique.
3. ω dérive-t-elle d'un potentiel scalaire dans le plan privé de l'origine O ?
4. "Toute forme exacte est fermée". La réciproque de cette propriété est-elle vraie ?

Références

[1] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 3. Analyse II*, Belin, Collection DIA, 1987.

[2] D. Duverney, S. Heumez, G. Huvent, *Toutes les mathématiques. Cours. Exercices corrigés. MPSI, PCSI, PTSI, TSI.*, Ellipses, 2004.



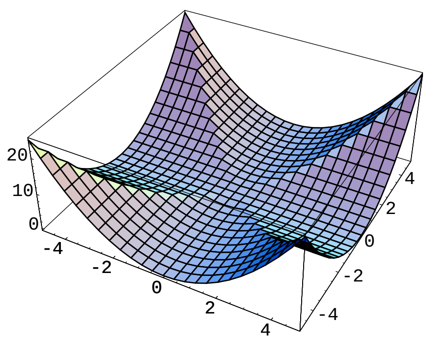
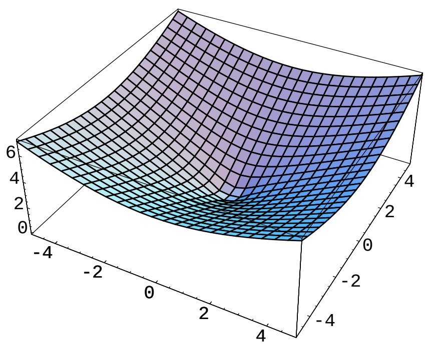


FIG. 1 – Exercice 1 Exercice 4



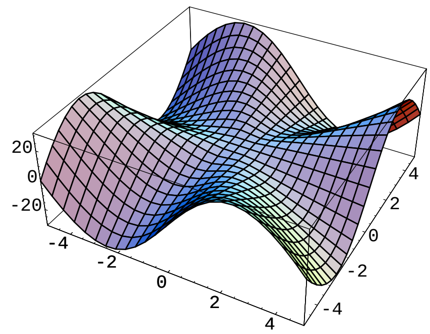
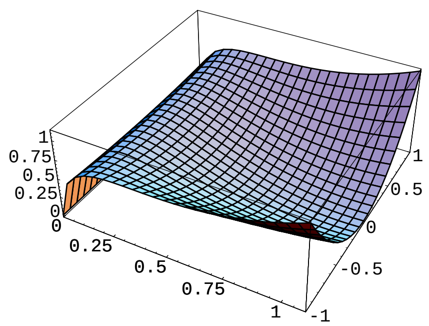


FIG. 2 – Exercice 5 Exercice 10



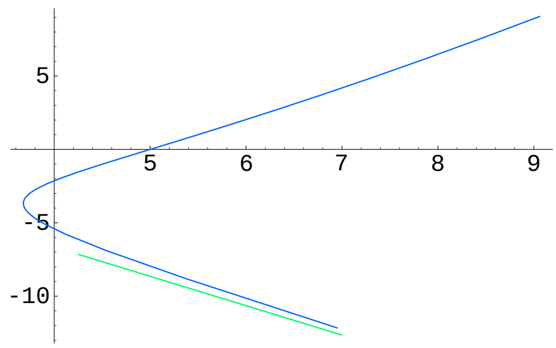


FIG. 3 – Exercice 12 Exercice 19