Différentiabilité ; Fonctions de plusieurs variables réelles

Denis Vekemans *

$\mathbb{R}^n$ est muni de l'une des trois normes usuelles $||.||_1$, $||.||_2$ ou $||.||_\infty$.

$$||x||_1 = \sum_{i \leq i \leq n} |x_i| \ ; \ ||x||_2 = \sqrt{\sum_{i \leq i \leq n} x_i^2} \ ; \ ||x||_\infty = \sup_{i \leq i \leq n} |x_i|.$$

Toutes les normes de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

1 Fonctions de plusieurs variables réelles

Fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ (U est ouvert de $\mathbb{R}^n$).

Définition 1.1
*f admet une **limite** en $a \in U$ s'il existe $l \in \mathbb{R}^p$ tel que*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, ||x - a|| < \alpha \Longrightarrow ||f(x) - l|| < \varepsilon.$$

S'il existe, l est unique et on note $l = \lim_{x \to a}$.

- $\{f | \ \exists l, l = \lim_{x \to a} f\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; $\phi : f \mapsto \lim_{x \to a} f$ est linéaire.

Définition 1.2
*f est **continue** en $a \in U$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. On note $f \in \mathcal{C}^0(a)$.*

- $\{f | \ f \in \mathcal{C}^0(a)\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Si f est linéaire, f est continue (en particulier, si f est une projection, f est continue).

Définition 1.3
*f admet des **fonctions partielles associées** à f au point $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$:*

$$f_i^{(a)} : x_i \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

- f admet une limite au point $a \Longrightarrow f_i^{(a)}$ admet une limite en a_i. Mais la réciproque est fausse.
- $f \in \mathcal{C}^0(a) \Longrightarrow f_i^{(a)} \in \mathcal{C}^0(a_i)$. Mais la réciproque est fausse.

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Définition 1.4
*f admet un **développement limité d'ordre** 2 en $a \in U$ si*

$$\exists L \text{ forme linéaire, } \exists q \text{ forme quadratique, } f(a+h) = f(a) + L(h) + q(h) + \phi(h)$$

avec $|\phi(h)| = o(||h||^2)$, i.e. $\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \omega_{1,1}, \omega_{1,2}, \dots, \omega_{n,n}) \in \mathbb{R}^{n+\frac{n(n+1)}{2}}$ tels que

$$f(a_1+h_1, \dots, a_n+h_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i h_i + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \omega_{i,j} h_i h_j + \phi(h)$$

avec $|\phi(h)| = o(||h||^2)$.

2 Différentielle

Fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ (U est ouvert de $\mathbb{R}^n$).

Définition 2.1
*f est **différentiable** en a (on note $f \in Diff(a)$) si*

$$\exists L \text{ forme linéaire, } \forall h,\ f(a+h) = f(a) + L(h) + \phi(h)$$

avec $|\phi(h)| = o(||h||)$.

De façon équivalente,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall h, ||h|| < \alpha \Longrightarrow ||f(a+h) - f(a) - L(h)|| < \varepsilon ||h||.$$

*L'application L, si elle existe, est unique et est appelée la **différentielle** de f au point $a \in U$. On la note df_a.*

*Lorsque f est différentiable en $a \in U$ et que la différentielle de f est continue en $a \in U$, on dit que f est **continûment différentiable** en a (on note $f \in \mathcal{C}^1(a)$).*

- $L = df_a$ est linéaire de U dans $\mathbb{R}^p$. Mais attention, la différentiabilité et L ne dépendent pas du choix des normes.
- $f \in Diff(a) \Longrightarrow f \in \mathcal{C}^0(a)$.
- $\{f |\ f \in Diff(a)\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; $\phi :\mapsto df_a$ est linéaire.
- $f \in \mathcal{C}^1(a) \Longleftrightarrow df_a \in \mathcal{C}^0(a)$.

Définition 2.2
*On dit que f admet une **dérivée dans la direction** u (u est tel que $||u|| = 1$), s'il existe $\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a+\lambda u) - f(a)}{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial u}(a)$.*

- Si $f \in Diff(a)$, alors f admet des dérivées dans toutes les directions et $\frac{\partial f}{\partial u}(a) = df_a(u)$. Mais la réciproque est fausse.

3 Exemples d'applications différentiables

• Si f est linéaire, $df_a = f$.

• Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est bilinéaire, $df_{a_1,a_2}(h_1, h_2) = f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2)$.

• Si $f : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $f \in Diff(a) \Longleftrightarrow f \in D(a)$ et $hf'(a) = df_a(h)$.

• Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $f \in Diff(a) \Longleftrightarrow \forall i,\ f_i \in Diff(a)$ et $df_a(h) = (df_{1a}(h), \ldots, df_{p_a}(h))$ avec $f = (f_1, \ldots, f_p)$. Dans le cas particulier où $n = 1$, $f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_p'(a))$.

4 Différentielle de la composée de deux applications

$U \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p \xrightarrow{g} \mathbb{R}^q$.

Proposition 4.1

$f \in Diff(a), g \in Diff(f(a)) \Longrightarrow g \circ f \in Diff(a)$ et

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

• $f \in \mathcal{C}^1(a), g \in \mathcal{C}^1(f(a)) \Longrightarrow g \circ f \in \mathcal{C}^1(a)$.

5 Différentielle du produit et du quotient de deux applications

Proposition 5.1

Si $f \in Diff(a)$, $g \in Diff(a)$, alors $fg \in Diff(a)$ et

$$d(fg)_a = f(a)dg_a + g(a)df_a.$$

Proposition 5.2

Si $f \in Diff(a)$, $g \in Diff(a)$ et si g ne s'annule pas dans un voisinage de a, alors $\frac{f}{g} \in Diff(a)$ et

$$d(\frac{f}{g})_a = \frac{g(a)df_a + f(a)dg_a}{(g(a))^2}.$$

6 Dérivées partielles

Définition 6.1

On dit que f admet une dérivée partielle d'indice i si $f_i^{(a)}$ est dérivable au point a_i.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (f_i^{(a)})'(a_i) = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + \rho, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{\rho}.$$

• $f \in Diff(a) \Longrightarrow f$ admet en a des dérivées partielles à tous les indices et $df_a(h) = \sum_{1 \leq i \leq n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Mais, la réciproque est fausse.

• f admet en a des dérivées partielles continues à tous les indices $\Longrightarrow f \in Diff(a)$. Mais, la réciproque est fausse.

• $f \in \mathcal{C}^1(U) \Longleftrightarrow \forall i, \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}^0(U)$.

7 Matrice jacobienne

Définition 7.1

$J_f(a)$ donnée par

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix},$$

est appelée matrice jacobienne de f au point a.

- Cas particuliers.
  - $p = 1$, $df_a(h) = \sum_{1 \le i \le n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
  - $n = 1$, $f'(a) = \sum_{1 \le i \le n} f_i'(a) e_i$.
  - $n = p$, $det(J_f(a)) = j_f(a) = \frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}$.

Proposition 7.1

$U \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p \xrightarrow{g} \mathbb{R}^q$. *Si $f \in Diff(a)$ et si $g \in Diff(f(a))$,*

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a).$$

Proposition 7.2

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_l}(a) = \sum_{1 \le k \le p} \frac{\partial g_i}{\partial f_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_l}(a)$$

(formule de changement de variable).

8 Difféomorphismes

$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$. Dans cette section, $p = n$.

Définition 8.1

*Φ est un **difféomorphisme** si c'est une bijection différentiable ainsi que Φ^{-1}.*

- Soit Φ est un difféomorphisme. Pour tout $a \in U$, la matrice jacobienne $J_\Phi(a)$ est inversible et $J_{\Phi^{-1}}(\Phi(a)) = (J_\Phi(a))^{-1}$.
- Soit Φ est un difféomorphisme. Pour tout $a \in U$, le jacobien $j_\phi(a)$ ne s'annule pas et $j_{\Phi^{-1}}(\Phi(a)) = \frac{1}{j_\Phi(a))}$.

Définition 8.2

*Φ est un $\mathcal{C}^1$**-difféomorphisme** si c'est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ ainsi que Φ^{-1}.*

- Soit Φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Alors, l'application $a \mapsto j_\phi(a)$ est continue.

Proposition 8.1

THÉORÈME D'INVERSION LOCALE. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ dans U telle que $J_f(a)$ soit inversible. Alors, il existe un voisinage W_1 de a et un voisinage W_2 de $f(a)$ tel que la restriction de f à W_1 soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de W_1 sur W_2.*

9 Formule des accroissements finis

$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Dans cette section, $p = 1$ et U est convexe.

Proposition 9.1
Si $f \in Diff(U)$, $\exists \theta \in]0,1[$ tel que

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{1 \leq i \leq n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta h)$$

Proposition 9.2
Si df est bornée (i.e. $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in U$, $|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)| \leq M$), alors

$$\exists K \in \mathbb{R}^+,\ \forall (a,b) \in U^2, |f(b) - f(a)| \leq k||b-a||.$$

INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS.

10 Dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Dans cette section, $p = 1$.

Définition 10.1
*Si l'application $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ admet en a une dérivée partielle d'indice j, on la note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$. C'est une **dérivée partielle seconde** de f en a.*

Proposition 10.1
THÉORÈME DE SCHWARZ. *Si f admet des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ dans un voisinage de a et si ces dérivées partielles sont continues en a, alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Définition 10.2
On définit par récurrence les dérivées partielles successives si elles existent.

• Si f admet sur U des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ dans U. On peut alors intervertir l'ordre des dérivations.

11 Formules de Taylor-Lagrange et de Taylor-Young, développements limités

$f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Dans cette section, $n = 3$ et $p = 1$.

Proposition 11.1

FORMULE DE TAYLOR-LAGRANGE. *Si f est de classe $\mathcal{C}^\rho$, alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que*

$$\begin{aligned} f(a+h)-f(a) &= \sum_{1\le k\le \rho-1} \frac{1}{k!} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k} \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!} h_1^{\alpha_1}h_2^{\alpha_2}h_3^{\alpha_3} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}(a) \\ &+ \frac{1}{\rho!} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\rho} \frac{\rho!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!} h_1^{\alpha_1}h_2^{\alpha_2}h_3^{\alpha_3} \frac{\partial^\rho f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}(a+\theta h). \end{aligned}$$

Proposition 11.2

FORMULE DE TAYLOR-YOUNG. *Si f est de classe $\mathcal{C}^\rho$, alors il existe une fonction ϕ telle que*

$$f(a+h)-f(a) = \sum_{1\le k\le \rho} \frac{1}{k!} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k} \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!} h_1^{\alpha_1}h_2^{\alpha_2}h_3^{\alpha_3} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}(a) + \phi(h).$$

avec $|\phi(h)| = o(||h||^\rho)$.

Proposition 11.3

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans U, alors f admet en tout $a \in U$ un développement limité à l'ordre 2 fourni par la formule de Taylor-Young

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + q(h) + o(||h||^2).$$

où

$$L(h) = \left(h_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + h_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)(a)$$

et

$$q(h) = \frac{1}{2}\left(h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + h_3^2\frac{\partial f}{\partial x_3^2} + 2\left[h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} + h_2h_3\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3} + h_3h_1\frac{\partial f}{\partial x_3\partial x_1}\right]\right)(a).$$

12 Extrema

$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Dans cette section, $p = 1$.

Définition 12.1

On dit que f admet un ***maximum*** (respectivement ***minimum***) ***relatif*** *en $a \in U$ s'il existe un voisinage V de a tel que*

$$\forall x \in V,\ f(x) \le f(a) \text{ (repsctivement } f(x) \ge f(a)).$$

Le maximum (respectivement minimum) est dit ***strict*** *si*

$$\forall x \in V\backslash\{a\}, f(x) \ne f(a).$$

Proposition 12.1

Si f est exrtemum en a et différentiable en a, alors $df_a = 0$.

• En particulier, si $U = \mathbb{R}^n$, pour que f présente un extremum relatif en a, il est nécessaire que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$. La réciproque est fausse.

• **Cas où** $n = 2$**.** On suppose que f est une application de classe $\mathcal{C}^2$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $a \in U$ est choisi tel que $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$. On note alors $r(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)$ et $t(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$ et $\delta(a) = (s^2 - rt)(a)$.

– Si $\delta(a) < 0$, a est un **extremum relatif** pour f (maximum si $r(a) < 0$; minimum si $r(a) > 0$).
– Si $\delta(a) > 0$, a n'est pas un extremum relatif, mais un **col** pour f (tout voisinage de a contient x et y tels que $f(x) < f(a) < f(y)$).
– Si $\delta(a) = 0$, on ne peut conclure.

Cette discussion résume de l'étude de la signature de la forme quadratique

$$q(x, y) = r(a)x^2 + 2s(a)xy + t(a)y^2.$$

13 Fonctions implicites

$f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Dans cette section, $n = 3$ et $p = 1$.

Proposition 13.1

THÉORÈMES DES FONCTIONS IMPLICITES

Si $f \in \mathcal{C}^1(U)$, et que $(a, b, c) \in U$ est tel que $f(a, b, c) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$, alors il existe un voisinage V de (a, b, c), un voisinage W de (a, b) et une fonction $\phi : W \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $c = \phi(a, b)$ et $(x, y, z) \in V, f(x, y, z) = 0 \Longleftrightarrow (x, y) \in W, z = \phi(x, y)$, alors

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, \phi(x, y)) \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, \phi(x, y)).$$

• Autrement dit, on peut résoudre localement l'équation $f(x, y, z) = 0$.

• Les relations concernant les dérivées partielles s'obtiennent par dérivation de la relation $f(x, y, \phi(x, y)) = 0$.

14 Gradient, divergence, laplacien, rotationnel

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel euclidien E, de dimension 3.

Définition 14.1
*Un **champ scalaire** défini sur U est un application $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Un **champ vectoriel** défini sur U est un application $\vec{V} : U \longrightarrow E$.*

• Ces définitions s'étendent à un espace affine euclidien moyennant le chiox d'une origine.

• On dit que le champ scalaire ou vectoriel est continu (respectivement différentiable, respectivement de classe $\mathcal{C}^k$) si ϕ ou $\vec{V}$ est continu (respectivement différentiable, respectivement de classe $\mathcal{C}^k$).

14.1 Gradient d'un champ scalaire

ϕ est un champ scalaire différentiable dans U.

Définition 14.2
*Le vecteur $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{i}}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial \vec{j}}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial \vec{k}}\vec{k}$ est indépendant de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ choisie. On l'appelle le **gradient** du champ ϕ et on le note $\overrightarrow{grad}\ \phi$.*

Proposition 14.1
Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et qu'on note $\phi(\vec{u}) = \Phi(x, y, z)$, on a alors

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{k}.$$

Propriétés du gradient.
- $\phi \mapsto \overrightarrow{\text{grad}}\ \phi$ est linéaire.
- Si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux champs scalaires différentiables,

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ (\phi_1\phi_2) = \phi_1\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi_2 + \phi_2\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi_1.$$

14.2 Divergence d'un champ vectoriel

$\vec{V}$ est un champ vectoriel différentiable dans U.

Définition 14.3
Le réel $\vec{i}\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{i}} + \vec{j}\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{j}} + \vec{k}\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{k}}$ est indépendant de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ choisie. On l'appelle ***divergence*** *du champ $\vec{V}$ et on le note div $\vec{V}$.*

Proposition 14.2
Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et qu'on note $\vec{V}(\vec{u}) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, on a alors

$$\text{div}\ \vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Propriétés de la divergence.
- $\vec{V} \mapsto \text{div}\ \vec{V}$ est linéaire.
- Si ϕ est un champ scalaire différentiable et si $\vec{V}$ est un champ vectoriel différentiable,

$$\text{div}\ (\phi\vec{V}) = \phi\text{div}\ \vec{V} + \vec{V}\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi.$$

14.3 Laplacien d'un champ scalaire

ϕ est un champ scalaire de classe $\mathcal{C}^2$ dans U.

Définition 14.4
Le réel $(\text{div} \circ \overrightarrow{\text{grad}})(\phi)$ est indépendant de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ choisie. On l'appelle le ***laplacien*** *du champ ϕ et on le note $\Delta\phi$.*

Proposition 14.3
Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et qu'on note $\phi(\vec{u}) = \Phi(x, y, z)$, on a alors

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}.$$

Propriétés du laplacien.
- $\phi \mapsto \Delta\phi$ est linéaire.
- Si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux champs scalaires de classe $\mathcal{C}^2$,

$$\Delta(\phi_1\phi_2) = \phi_1\Delta\phi_2 + \phi_2\Delta\phi_1 + 2\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi_1\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi_2.$$

14.4 Laplacien d'un champ vectoriel

$\vec{V}$ est un champ vectoriel de classe $\mathcal{C}^2$ dans U.

Définition 14.5
*Le vecteur $(\overrightarrow{\text{grad}} \circ \text{div})(\vec{V})$ est indépendant de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ choisie. On l'appelle le **laplacien** du champ $\vec{V}$ et on le note $\Delta\vec{V}$.*

Proposition 14.4
Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et qu'on note $\vec{V}(\vec{u}) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, on a alors

$$\Delta\vec{V} = \Delta P\vec{i} + \Delta Q\vec{j} + \Delta R\vec{k}.$$

Propriétés du laplacien.
- $\vec{V} \mapsto \Delta\vec{V}$ est linéaire.
- Si ϕ est un champ scalaire de classe $\mathcal{C}^2$ et si $\vec{V}$ est un champ vectoriel de classe $\mathcal{C}^2$,

$$\Delta(\phi\vec{V}) = \phi\Delta\vec{V} + \vec{V}\Delta\phi + 2\text{div}\vec{V}\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi.$$

14.5 Rotationnel d'un champ vectoriel

E est, dans cette sous-section, orienté. $\vec{V}$ est un champ vectoriel différentiable dans U.

Définition 14.6
*Le vecteur $\left(\vec{i} \wedge \frac{\partial\vec{V}}{\partial\vec{i}}\right) + \left(\vec{j} \wedge \frac{\partial\vec{V}}{\partial\vec{j}}\right) + \left(\vec{k} \wedge \frac{\partial\vec{V}}{\partial\vec{k}}\right)$ est indépendant de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ choisie. On l'appelle le **rotationnel** du champ $\vec{V}$ et on le note $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V}$.*

Proposition 14.5
Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et qu'on note $\vec{V}(\vec{u}) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, on a alors

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}.$$

***Propriétés du rotationnel**.*
- *$\vec{V} \mapsto \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V}$ est linéaire.*
- *Si ϕ est un champ scalaire différentiable et si $\vec{V}$ est un champ vectoriel différentiable,*

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ (\phi\vec{V}) = \phi\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V} + \overrightarrow{\text{grad}}\ \phi \wedge \vec{V}.$$

15 Champ de gradient, champ de rotationnel

Définition 15.1
*Un champ vectoriel $\vec{V}$ défini sur un ouvert connexe U est un **champ de gradient** s'il existe un champ scalaire ϕ différentiable sur U (appelé **potentiel scalaire** de $\vec{V}$), tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \phi$.*

• Deux potentiels scalaires de $\vec{V}$ diffèrent d'une constante. Pour tout réel λ, l'ensemble des points M tels que $\phi(M) = \lambda$ est appelée surface équipotentielle.

• Si $V \in \mathcal{C}^1(U)$, la condition $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V} = 0$ est nécessaire pour que $\vec{V}$ soit un champ de gradient car

$$\overrightarrow{\text{rot}\ \overrightarrow{\text{grad}}}\ \phi = 0.$$

Cette condition devient suffisante lorsque U est convexe.

• Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et qu'on note $\vec{V}(\vec{u}) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, la condition précédente (i.e. $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V} = 0$) équivaut à

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0\ ;\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0\ ;\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

• Dans la pratique, si $\vec{V}$ vérifie $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V} = 0$, on écrit $\frac{\partial \phi}{\partial x} = P$, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q$ et $\frac{\partial \phi}{\partial z} = R$, puis on intègre l'une des équations pour obtenir par exemple, $\phi(x) = \int_{x_0}^{x} P(t,y,z)dt + \lambda(y,z)$ que l'on dérive pour écrire $Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}$, ce qui donne une condition sur λ.

Définition 15.2

Un champ vectoriel $\vec{V}$ défini sur un ouvert connexe U est un ***champ de rotationnel*** *s'il existe un champ vectoriel $\vec{\Omega}$ différentiable sur U (appelé* ***potentiel vecteur*** *de $\vec{V}$), tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\Omega}$.*

• Deux potentiels vecteurs de $\vec{V}$ diffèrent d'un gradient.

• Si $V \in \mathcal{C}^1(U)$, la condition div $\vec{V} = 0$ est nécessaire pour que $\vec{V}$ soit un champ de rotationnel car

$$\text{div}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\Omega} = 0.$$

• Dans la pratique, pour déterminer les potentiels vecteurs $\vec{\Omega} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, on cherche une solution particulière $\vec{\Omega_0}$ dont on fixe arbitrairement l'une des composantes à 0, puis $\vec{\Omega_0} + \overrightarrow{\text{grad}}\ \phi$ (où ϕ est un champ scalaire arbitraire de classe $\mathcal{C}^2$) est aussi un potentiel vecteur.

16 Formes différentielles de degré un

$U \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 16.1

Une ***forme différentielle de degré un*** *sur U est une application ω de U dans l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in U$ et $h = (dx_1, \ldots, dx_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :*

$$\omega(a)(h) = \sum_{1 \le i \le n} P_i(a) dx_i.$$

• Pour que la forme différentielle ω soit de classe $\mathcal{C}^k$ dans U, il faut et il suffit que chaque P_i le soit.

• Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable dans U, l'application $df : a \mapsto df_a$ est un exemple de forme différentielle de degré un.

Définition 16.2

Une forme différentielle ω est **exacte** *sur U s'il existe f de classe $\mathcal{C}^1$ dans U telle que $df = \omega$ (f est une primitive de ω et si U est connexe, deux primitives de ω diffèrent d'une constante).*

Définition 16.3

Une forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ de degré 1 et de classe $\mathcal{C}^1$ dans U est **fermée** *si*

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0\ ;\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0\ ;\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

- Toute forme exacte est fermée. La réciproque est vraie si U est convexe.
- Si on regarde P, Q et R comme les composantes d'un champ vectoriel $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, alors

– ω est fermée $\Longleftrightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V} = \vec{0}$.

– ω est exacte et ϕ est une primitive de $\omega \Longleftrightarrow \vec{V}$ est un champ de gradient et ϕ est un potentiel scalaire de $\vec{V}$.

Définition 16.4

Un champ scalaire μ est un **facteur intégrant** *de la forme différentielle ω si la forme $\mu\omega$ est fermée.*

Définition 16.5

$\omega = Pdx + Qdy$ est une forme différentielle de degré un et de classe $\mathcal{C}^1$ dans U, W un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\phi : W \Longrightarrow U$ un changement de variables admissible ($\mathcal{C}^1$-difféomorphisme) donné par $x = f(u,v)$ et $y = g(u,v)$. On appelle **image transposée de la forme** *ω par ϕ la forme*

$$\begin{aligned}\phi^*(\omega) &= P(\phi(u,v))\left(\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv\right) + Q(\phi(u,v))\left(\frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv\right)\\ &= [(P\circ\phi)\frac{\partial f}{\partial u} + (Q\circ\phi)\frac{\partial g}{\partial u}]du + [(P\circ\phi)\frac{\partial f}{\partial v} + (Q\circ\phi)\frac{\partial g}{\partial v}]dv\end{aligned}$$

- $\phi^*(\omega)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ dans W. $\phi^*(\omega_1+\omega_2) = \phi^*(\omega_1) + \phi^*(\omega_2)$. $(\phi\circ\psi)^* = \psi^*\circ\phi^*$.

Exemple : si ϕ est la transposition polaire $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$,

– $\omega_1 = xdy - ydx\,;\ \phi^*(\omega_1) = \rho^2 d\theta$.

– $\omega_2 = xdx + ydy\,;\ \phi^*(\omega_2) = \rho d\rho$.

17 Intégrales curvilignes

Définition 17.1

Soit $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ une forme différentielle de degré un, continue dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ et $\overset{\hookrightarrow}{\gamma} = ([a,b],\vec{F})$ un arc géométrique orienté de classe $\mathcal{C}^1$, dont le support Γ est contenu dans U.

Si $\vec{F} : t \mapsto \vec{F}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$, alors l'intégrale

$$\int_a^b [P(\vec{F}(t))f_1'(t) + Q(\vec{F}(t))f_2'(t) + R(\vec{F}(t))f_3'(t)]dt$$

ne dépend pas du choix de la paramétrisation de γ et on l'appelle **intégrale de la forme différentielle** *ω sur l'arc orienté $\overset{\hookrightarrow}{\gamma}$ ou* **intégrale curviligne** *selon $\overset{\hookrightarrow}{\gamma}$ (notée $\int_{\overset{\hookrightarrow}{\gamma}} \omega$).*

• $\int_{-\overleftrightarrow{\gamma}} \omega = -\int_{\overleftrightarrow{\gamma}} \omega$.

• Si $\overleftrightarrow{\gamma}$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, il est réunion finie d'arcs $\overleftrightarrow{\gamma}_i$ de classe $\mathcal{C}^1$ et on définit l'intégrale de ω par $\int_{\overleftrightarrow{\gamma}} \omega = \sum_{1\leq i\leq n} \int_{\overleftrightarrow{\gamma}_i} \omega$.

Définition 17.2
Si (P, Q, R) sont regardées comme composantes du champ vectoriel $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, on note alors $\int_{\overleftrightarrow{\gamma}} \omega = \int_{\overleftrightarrow{\gamma}} \vec{V}\overrightarrow{dM}$ et on dit que c'est la ***circulation*** *du champ vectoriel $\vec{V}$ le long de l'arc orienté $\overleftrightarrow{\gamma}$.*

• $\overleftrightarrow{\gamma}$ étant fixé, $\omega \mapsto \int_{\overleftrightarrow{\gamma}} \omega$ est linéaire.

• $|\int_{\overleftrightarrow{\gamma}} \vec{V}\overrightarrow{dM}| \leq l(\gamma) \sup_{M\in\Gamma} ||\vec{V}(M)||$ où $l(\gamma)$ est la longueur de l'arc γ.

• Si $\phi^*(\omega)$ désigne la transposée de la forme ω, on a $\int_{\phi(\overleftrightarrow{\gamma})} \omega = \int_{\overleftrightarrow{\gamma}} \phi^*(\omega)$ où $\phi(\overleftrightarrow{\gamma})$ est l'image par ϕ de l'arc ω.

• Si ω est une forme différentielle exacte dans U, $\int_{\overleftrightarrow{\gamma}} \omega$ ne dépend que des extrémités de l'arc $\overleftrightarrow{\gamma}$ et $\int_{\overleftrightarrow{\gamma}} \omega = \phi(B) - \phi(A)$ où ϕ est une primitive de ω (i.e. $d\phi = \omega$) et A et B les extrémités de l'arc (i.e. $\overrightarrow{OA} = \vec{F}(a)$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{F}(b)$). En particulier, si ω est une forme différentielle exacte et si l'arc $\overleftrightarrow{\gamma}$ est fermé (i.e. $A = B$), $\int_{\overleftrightarrow{\gamma}} \omega = 0$.

Références

[1] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 3. Analyse II*, Belin, Collection DIA, 1987.