Intégrales généralisées

Denis Vekemans *

Exercice 1 Etudier, suivant les valeurs de α et β, la convergence des intégrales $(0 < a < 1 < b)$)

$$\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta} \text{ et } \int_b^\infty \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

Exercice 2 Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, intégrables sur tout segment de $\mathbb{R}^+$, telles que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \text{ et } g \underset{\infty}{\sim} f.$$

Comparer, au voisinage de l'infini

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ et } G(x) = \int_0^x g(t)dt.$$

Exercice 3 Etudier la convergence de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\arccos(1-x)}.$$

Exercice 4 Etudier, suivant les valeurs du réel α, la convergence de l'intégrale

$$I = \int_0^\infty (\ln u - \ln(1-e^{-u}))e^{-\alpha u}\frac{du}{u}.$$

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue.

1. On suppose que f est bornée. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-nt} f(t)dt.$$

2. On suppose que $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R}^+,\ \forall t \geq A, |f(t)| \leq e^{\alpha t}$. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-nt} f(t)dt.$$

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

3. Montrer, en supposant que f est bornée, que

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{\infty} e^{-nt}f(t)dt = f(0).$$

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$.

Montrer que $\forall c > 0$ $(c \neq 1)$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{f(cx) - f(x)}{x}dx$ existe et calculer sa valeur.

On pourra, après l'avoir démontrée, utiliser l'égalité suivante $(0 < a < X)$

$$\int_a^X \frac{f(cx) - f(x)}{x}dx = \int_X^{cX} \frac{f(x)}{x}dx - \int_a^{ca} \frac{f(x)}{x}dx.$$

Exercice 7 Evaluer

$$\lim_{x\to\infty} e^{x^2}\int_x^{\infty} e^{-t^2}dt.$$

Exercice 8

1. Pour quelles valeurs de n entier naturel, l'intégrale

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

est-elle convergente ?

2. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} lorsque ces deux intégrales existent.
3. Exprimer l'intégrale

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2px + q)^n}$$

en fonction de I_n, lorsque p et q sont deux réels vérifiant l'inégalité $q - p^2 > 0$.

Exercice 9

1. Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles

$$\int_0^1 \frac{|\ln x|^{\beta}}{(1-x)^{\alpha}}dx$$

est convergente.

2. En déduire que

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}dx$$

converge et calculer sa valeur.

Exercice 10

1. Pour quelles valeurs réelles de α, l'application
$$\alpha \to \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$
est-elle définie ?
2. Evaluer $\Gamma(n)$ pour n entier naturel non nul.
3. Pour r et s réels, on considère l'intégrale
$$I(r,s) = \int_0^1 x^r \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s dx.$$
Montrer que $I(r,s)$ converge si et seulement si $r > -1$ et $s > -1$.
4. Si $r > -1$ et $s > -1$, montrer que
$$I(r,s) = \int_0^\infty e^{-(r+1)x}x^s dx = \frac{1}{(r+1)^{s+1}} I(0,s).$$
5. Si $r > -1$ et $n \in \mathbb{N}$, déduire la valeur de $I(r,n)$.

Exercice 11 Pour α réel, on définit, lorsque ceci a un sens,
$$I_\alpha = \int_{2\pi}^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx \text{ et } J_\alpha = \int_{2\pi}^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}dx.$$
1. Montrer que I_α et J_α sont absolument convergentes pour $\alpha > 1$.
2. En déduire que I_α et J_α sont convergentes pour $0 < \alpha \leq 1$. Que peut-on dire des intégrales
$$A_\lambda = \int_0^\infty \sin(x^\lambda)dx \text{ et } B_\lambda = \int_0^\infty \cos(x^\lambda)dx$$
lorsque $\lambda > 1$?
3. Montrer que I_α et J_α divergent si $\alpha < 0$.
On pourra envisager les suites de termes généraux $u_n = \displaystyle\int_{2\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ et $v_n = \displaystyle\int_{2\pi}^{n\pi+\pi/2} \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$.

Exercice 12
1. Soit $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, positive et décroissante. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^0$. Montrer, grâce à une intégration par parties, que
$$\exists \zeta \in [a,b], \int_a^b f(x)\Phi(x)dx = \Phi(a)\int_a^\zeta f(x)dx.$$
2. Soit $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, positive et décroissante, et telle que $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 0$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^0$ et telle que $\exists A > 0,\ \forall x > a, \left|\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right| \leq A$. Déduire que l'intégrale
$$\int_a^\infty f(x)\Phi(x)dx$$
est convergente.

Références

[1] M. Messeri, *Exercices de mathématiques. 2. Analyse I*, Belin, Collection DIA, 1987.