Intégrales définies ; intégrales dépendant d'un paramètre

Denis Vekemans *

Exercice 1 Calculer $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$.

Exercice 2

1. Montrer la double-inégalité suivante
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \int_{n}^{2n} \frac{dx}{x}.$$
2. En déduire
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}.$$
3. Quel résultat obtient-on pour
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \text{ où } k \text{ est un entier naturel non nul et distinct de } 1\,?$$

Exercice 3 Etudier la suite de terme général
$$u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{x+2} dx.$$

Exercice 4 Déterminer
$$\lim_{x\to 1_+} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$
On pourra comparer $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ et $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t}$.

Exercice 5 Montrer que pour toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}^{+*}$ intégrable sur $[a,b]$,
$$\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2.$$
Pour quelles fonctions continues y a-t-il égalité ?

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Exercice 6 Déterminer

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}\int_3^{x^2+x} \frac{\sin t dt}{3+\ln(\ln t)}.$$

Exercice 7 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)dx = f(0)$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, trouver un équivalent, lorsque n tend vers ∞ de

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx.$$

Exercice 8 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue. On pose $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

1. Montrer que, pour $M > 0$,

$$\forall \varepsilon \in]0, M[,\ \exists \alpha > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \int_a^b (f(x))^n dx \geq \alpha \cdot (M-\varepsilon)^n.$$

2. En déduire, par un encadrement convenable, que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b (f(x))^n dx\right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

3. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, g intégrable sur $[a,b]$ et vérifiant

$$\forall x \in [a,b],\ 0 < \lambda \leq g(x) \leq \mu.$$

Que peut-on dire de

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b (f(x))^n \cdot g(x) dx\right)^{\frac{1}{n}} ?$$

Exercice 9 Donner une primitive de la fonction f donnée par

1. $f(x) = x \arctan x$; (IPP ; $\dfrac{-x + \arctan x + x^2 \arctan x}{2}$)
2. $f(x) = \cosh x \cdot \sin 2x$; (double IPP ; $\dfrac{-2\cos(2x)\cdot \cosh x + \sin(2x)\cdot \sinh x}{5}$)
3. $f(x) = x^\alpha \ln x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. (si $\alpha = -1$, direct ; $\dfrac{(\ln x)^2}{2}$; et, si $\alpha \neq -1$, IPP ; $x^\alpha \left(\dfrac{-x}{(1+\alpha)^2} + \dfrac{x\ln x}{1+\alpha}\right)$)

Exercice 10 Soit $f : [\alpha, \beta] \to [a,b]$.

1. On suppose que f est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$. Evaluer

$$A = \int_\alpha^\beta f(t)dt + \int_a^b f^{-1}(t)dt.$$

2. On suppose que f est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^0$. Evaluer
$$A = \int_\alpha^\beta f(t)dt + \int_a^b f^{-1}(t)dt.$$

Exercice 11 Soient α et β deux réels non nuls et a et b deux réels. Montrer que la primitive
$$\int e^{\alpha x}(a\cos(\beta x) + b\sin(\beta x))dx$$
est de la forme
$$e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)) + C,$$
où A, B et C sont réels.

Exercice 12 Donner une primitive de la fonction f donnée par

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$;
   Chgt. var. $u = \dfrac{1+2x}{\sqrt{3}}$;
   $F(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan u$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$;
   $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \dfrac{-x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)$,
   Chgt. var. $u = 1+\sqrt{2}x$; $v = 1-\sqrt{2}x$;
   $F(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}(2\arctan u + 2\arctan v + \ln(x^2+\sqrt{2}x+1) - \ln(x^2-\sqrt{2}x+1))$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{(x^3+1)^2}$;
   $f(x) = \dfrac{1}{9(1+x)^2} + \dfrac{2}{9(1+x)} + \dfrac{1-x}{3(1-x+x^2)^2} + \dfrac{3-2x}{9(1-x+x^2)}$,
   Chgt. var. $u = \dfrac{-1+2x}{\sqrt{3}}$;
   $F(x) = -\dfrac{1}{9(1+x)} + \dfrac{2}{9}\ln|1+x| + \dfrac{1}{3}(\dfrac{1+x}{3(1-x+x^2)} + \dfrac{2\arctan u}{3\sqrt{3}})$
   $+\dfrac{1}{9}(-\ln(1-x+x^2) + \dfrac{4\arctan u}{\sqrt{3}})$.

Exercice 13 Donner une primitive de la fonction f donnée par

1. $f(x) = \dfrac{1}{1+2\cos x}$;
   Chgt. var. $t = \tan\dfrac{x}{2}$;
   $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\dfrac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t}\right|$.
2. $f(x) = \dfrac{\tan x}{1+\cos x}$;
   Chgt. var. $u = \cos x$;
   $F(x) = \ln\left|\dfrac{1+u}{u}\right|$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}$;
   Chgt. var. $v = \tan x$; $w = 2v$;
   $F(x) = \dfrac{1}{2}\arctan w.$
4. $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$;
   $F(x) = \dfrac{x}{8} - \dfrac{\sin(4x)}{32}.$
5. $f(x) = \sin^3 x \cos^4 x$;
   Chgt. var. $u = \cos x$;
   $F(x) = \dfrac{u^7}{7} - \dfrac{u^5}{5}.$

Exercice 14 Donner une primitive de la fonction f donnée par
$f(x) = \dfrac{1}{e^x + 2e^{-x}}$;
Chgt. var. $u = e^x$; $t = \dfrac{u}{\sqrt{2}}$
$F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan t.$

Exercice 15 Donner une primitive de la fonction f donnée par

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$;
   Chgt. var. $t = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$;
   $F(x) = -2\arctan t + \ln\left|\dfrac{1+t}{1-t}\right|.$
2. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}$;
   Chgt. var. $t = \dfrac{2}{\sqrt{7}}(x + \dfrac{1}{2})$;
   $F(x) = \dfrac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{t^2+1} - \dfrac{1}{2}\mathrm{argsinh}t.$

Evaluer l'intégrale
$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}.$$

Exercice 16 Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Pour $x < 1$, on définit
$$x \to f(x) = \int_0^1 \frac{g(t)dt}{(1+t)(1-xt)}.$$

1. Calculer $f(x)$ lorsque $g(t) = 1 - t$ ($x \neq -1$; $x \neq 0$). Etudier le comportement de $f(x)$ lorsque x tend vers -1, 0 ou 1.
2. On suppose que $g(1) = 0$ et que g admet une dérivée à gauche en $t = 1$. Déterminer une fonction h, continue sur $[0,1]$, telle que
$$\frac{g(t)}{(1+t)(1-xt)} = \frac{g(t)}{1-t^2} + \frac{(x-1)h(t)}{1-xt}$$
et en déduire que $\lim_{x\to 1_-} f(x)$ existe.

Exercice 17 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que $\phi : x \to \displaystyle\int_a^b f(x-t)(1+t^2+\sin t)dt = \phi(x)$ est continue pour x réel.
2. A l'aide d'un changement de variable convenable, montrer que ϕ est dérivable et calculer $\phi'(x)$.
3. Si on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$, retrouver le résultat précédent en appliquant le théorème de dérivation sous le signe $\int$.

Exercice 18 Soit x un réel.

1. Evaluer l'intégrale $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{dt}{1+xt} = \phi(x)$.
2. En appliquant le théorème de dérivation sous le signe $\int$, en déduire la valeur de

$$\int_0^\alpha \frac{tdt}{(1+xt)^2}.$$

Références

[1] M. Messeri, *Exercices de mathématiques. 2. Analyse I*, Belin, Collection DIA, 1987.