# *Propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$ et suites numériques réelles*

Denis Vekemans *

## 1 Ordre total compatible

En algèbre générale, un **groupe ordonné** est la donnée d'une ensemble $\mathcal{G}$, muni d'une loi de composition interne notée $+$ lui conférant une structure de groupe, et d'une relation d'ordre notée $\leq$ compatible avec la loi de groupe.

Plus précisément, avec les notations précédentes, on dit que la relation d'ordre $\leq$ est compatible avec la loi $+$ si, pour tous éléments $x$, $y$ et $g$ du groupe $\mathcal{G}$, la relation $x \leq y$ entraîne les relations $g + x \leq g + y$ et $x + g \leq y + g$.

On appelle **groupe totalement ordonné** un groupe ordonné dont la relation d'ordre est totale.

Exemples ...

- Le groupe additif $(\mathbb{Z}, +)$ des entiers relatifs, muni de la relation d'ordre habituelle, est un groupe abélien totalement ordonné.
- Le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ des réels strictement positifs est un autre groupe abélien totalement ordonné.
- Mais le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, \times)$ des réels non nuls n'est pas un groupe ordonné.

Toujours en algèbre générale, un **corps ordonné** est la donnée d'un corps $(\mathbb{K}, +, \times)$, muni d'une relation d'ordre notée $\leq$ compatible avec la structure de corps.

Plus précisément, avec les notations précédentes, on dit que la relation d'ordre $\leq$ est compatible avec la structure de corps de $(\mathbb{K}, +, \times)$ si les deux conditions suivantes sont réunies :

1. Le groupe additif $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe ordonné par la relation d'ordre (c'est-à-dire que celle-ci est compatible avec l'addition).
2. On a, pour tous éléments $x$ et $y$ du corps $(\mathbb{K}, +, \times)$ tels que $x \geq 0$ et $y \geq 0$, l'inégalité $x \times y \geq 0$ (la relation d'ordre est compatible avec la multiplication).

Par commodité, on dira par la suite qu'un élément $x$ de $\mathbb{K}$ est positif si l'on a $x \geq 0$, et qu'il est négatif si l'on a $x \leq 0$ (on remarquera, par antisymétrie de la relation d'ordre $\leq$, que 0 est l'unique élément du corps à la fois positif et négatif).

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

On appelle **corps totalement ordonné** un corps ordonné pour lequel la relation d'ordre est totale.

Exemples ...

– Le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, muni de la relation d'ordre habituelle, est un corps totalement ordonnés.

– Le corps $\mathbb{R}$ des réels, muni de la relation d'ordre habituelle, est un corps totalement ordonnés.

En revanche, le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ne peut pas être muni d'une structure de corps totalement ordonné.

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde en supposant que $\mathbb{C}$ est muni d'une relation d'ordre compatible avec sa strucure de corps, et le rendant totalement ordonné. On note $\leq$ cette relation (on prendra cependant garde à ce qu'elle n'a a priori aucune raison de coïncider avec la relation d'ordre usuelle par restriction aux nombres réels). On note $\imath$ l'un des deux nombres complexes de carré égal à $-1$. Comme l'ordre est total, d'après la règle des signes et l'égalité $\imath^2 = -1$, on obtiendrait l'inégalité $-1 \geq 0$. Cela entraînerait, par passage à l'opposé, l'inégalité $0 \geq 1$. Mais comme 0 et 1 sont comparables, on a nécessairement $0 \leq 1$, et l'on obtiendrait l'égalité $0 = 1$, ce qui est une contradiction. Par conséquent, la relation d'ordre ne peut pas être à la fois totale et compatible avec la structure de corps de $\mathbb{C}$.

**Théorème 1**

$(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ *est un corps totalement ordonné.*

Propriétés ...

– On peut additionner des inégalités : si $\forall i \in [[1, n]],\ x_i \leq y_i$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

– Pour passer à l'opposé une inégalité : si $x \leq y$, alors $-y \leq -x$.

– On peut multiplier des inégalités à termes positifs : si $\forall i \in [[1, n]],\ 0 \leq x_i \leq y_i$, alors

$$0 \leq \prod_{i=1}^{n} x_i \leq \prod_{i=1}^{n} y_i.$$

– Pour passer à l'inverse une inégalité à termes positifs : si $0 < x \leq y$, alors $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$.

## 2 Archimède

A l'origine, l'énoncé de l'**axiome d'Archimède** est le suivant : "Pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple entier de la plus petite, supérieur à la plus grande."

Soit $(\mathcal{G}, +, \leq)$ un groupe commutatif totalement ordonné.

$(\mathcal{G}, +, \leq)$ vérifie l'axiome d'Archimède ou est archimédien si et seulement si quels que soient les éléments $a > 0$ et $b \geq 0$ de $\mathcal{G}$, il existe un entier naturel $n$ tel que $n \times a \geq b$.

Soit $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$ un corps totalement ordonné.

$(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$ vérifie l'axiome d'Archimède ou est archimédien si et seulement si le groupe commutatif $(\mathbb{K}, +, \leq)$ lui-même est archimédien.

**Théorème 2**
*$\mathbb{R}$ est archimédien.*

## 3 Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit sa **valeur absolue** $|x|$ par $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$.

Propriétés ...

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \in \mathbb{R}_+$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = 0 \iff x = 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $-|x| \leq x \leq |x|$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $|x \times y| = |x| \times |y|$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}^*$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$.

La distance $d(x, y)$ entre deux valeurs réelles $x$ et $y$ peut s'exprimer à l'aide de la valeur absolue : $d(x, y) = |x - y|$.

**Théorème 3**
***Inégalités triangulaires****.*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x + y| \leq |x| + |y|.$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ ||x| - |y|| \leq |x + y|.$$

## 4 Borne supérieure

**Théorème 4**
***Théorème de la borne supérieure****. Toute partie $A$ non vide majorée de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels admet une borne supérieure* $\sup_A$.

Caractérisation de la **borne supérieure** ...

- Soit $A$ une partie non vide majorée de l'ensemble $\mathbb{R}$, le réel $M$ est $\sup_A$ si et seulement si $M$ majore $A$ (i.e. $\forall x \in A,\ x \leq M$) et $M - \varepsilon$ ne majore pas $A$ (i.e. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A$ tel que $M - \varepsilon < x \leq M$).

Une partie $I$ de $\mathbb{R}$ est un intervalle si lorsqu'elle contient deux réels, elle contient alors tous les réels intermédiaires. En d'autres termes, $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ [x, y] \in I$.

Il en existe différents types : $[a, \infty[$, $]-\infty, b]$, $]a, \infty[$, $]-\infty, b[$, $[a, b]$, $\{a\}$, $[a, b[$, $]a, b]$, $\emptyset$, $\mathbb{R}$.

## 5 Partie entière d'un réel

Soit $x$ un réel, le plus grand entier inférieur ou égal à $x$ est appelé **partie entière** de $x$ et se note $E(x)$. On a donc pour tout réel $x$ : $E(x) \in \mathbb{Z}$ et $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

Valeurs décimales approchées ... La partie entière permet de définir les valeurs décimales par excès et par défaut d'un réel $x$ donné : pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, la valeur décimale par défaut de $x$ à $10^{-n}$ près est $u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ et la valeur décimale par excès de $x$ à $10^{-n}$ près est $v_n = \frac{1+E(10^n x)}{10^n} = u_n + 10^{-n}$.

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ ... Il existe une suite (croissante) de nombres rationnels $(r_n)_n$ convergeant vers $x$.

**Théorème 5**
*Soit* $]a, b[$ *un intervalle non vide de* $\mathbb{R}$*. Alors, il existe* $r \in \mathbb{Q}$ *tel que* $r \in ]a, b[$*. On dit que* $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$*.*

## 6 Suites réelles

Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que **la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** $l$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

On note $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ ou $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$ et on dit que la suite est convergente. Si la suite ne converge vers aucun réel, on dit que la suite est divergente.

**Théorème 6**
*La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $l$ *si et seulement si la suite* $(|u_n - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $0$*.*

**Théorème 7**
$\mathbb{R}$ *est complet (i.e. toute suite de Cauchy de* $\mathbb{R}$ *converge et réciproquement).*

**Théorème 8**
*Si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, alors sa limite est unique.*

**Théorème 9**
*Toute suite convergente est bornée.*

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **extraite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application $\phi$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $v_n = u_{\phi(n)}$.

**Théorème 10**
*Toute suite extraite d'une suite convergente* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers la même limite que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

**Théorème 11**
*Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles,* $\lambda$ *et* $\mu$ *deux réels.*
- *Si* $\lim_{n\to\infty} u_n = l_1$ *et* $\lim_{n\to\infty} v_n = l_2$*, alors* $\lim_{n\to\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda l_1 + \mu l_2$*.*
- *Si* $\lim_{n\to\infty} u_n = l_1$ *et* $\lim_{n\to\infty} v_n = l_2$*, alors* $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = l_1 l_2$*.*
- *Si* $\lim_{n\to\infty} u_n = l_1$ *et* $\lim_{n\to\infty} v_n = l_2 \neq 0$*, alors* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l_1}{l_2}$*.*

**Théorème 12**
*Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergeant vers* $l$ *et soient* $\lambda$ *et* $\mu$ *deux réels.*
- *Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n \leq \lambda$*, alors* $l \leq \lambda$*.*
- *Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n \geq \mu$*, alors* $l \geq \mu$*.*
- ***Théorème du gendarme****. Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $|u_n| \leq \alpha_n$ *et si* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$*, alors* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$*.*

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ ou **diverge vers** $+\infty$ et on note $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A.$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ ou **diverge vers** $-\infty$ et on note $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Longrightarrow u_n \leq A.$$

**Théorème 13**

*Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.*

- *Si $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors $\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = +\infty$.*
- *Si $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty} v_n = l > 0$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = +\infty$.*
- *Si $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.*
- *Si $u_n > 0$ et $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.*

**Théorème 14**

*Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :*

1. $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$,
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq u_n$,

*alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi vers $+\infty$.*

**Théorème 15**

***Théorème de la limite monotone**. Toute suite croissante et majorée converge ; toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.*

On dit que les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes** si l'une est crcoissante, l'autre décroissante et si la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

**Théorème 16**

***Théorème des suites adjacentes**. Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles convergent toutes les deux vers la même limite.*

**Théorème 17**

***Théorème de Bolzano-Weierstrass**. De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous suite convergente.*

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que $\lambda$ est une **valeur d'adhérence** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ \text{tel que } |u_n - \lambda| < \varepsilon.$$

Caractérisation de la **valeur d'adhérence** ...

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. "$\lambda$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$" équivaut à "il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de limite $\lambda$".

**Théorème 18**

*Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$. $a$ est un point d'accumulation de $A$ si et seulement s'il existe une suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A$ distincts de $a$ lui-même telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$.*

Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ ...

On dit que $I$ est un **intervalle stable** pour $f$ si $f(I) \subset I$.

**Théorème 19**

*Si $u_0 \in I$ et si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $I$ intervalle stable pour $f$, alors*

- *la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie,*
- *quand $f$ est croissante, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante lorsque $u_1 > u_0$ et décroissante lorsque $u_1 < u_0$,*
- *et quand $f$ est décroissante, la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante lorsque $u_2 > u_0$ et décroissante lorsque $u_2 < u_0$, pendant que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est de monotonie contraire.*

**Exercice 1** Justifier que le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, \times)$ des réels non nuls n'est pas un groupe ordonné.

**Exercice 2** On définit la fonction

$$g \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ x \longmapsto g(x) = \frac{|x|}{1+|x|}.$$

Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ g(x+y) \leq g(x) + g(y)$.

**Exercice 3** Montrer que si $A = \{1 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$, alors $\sup_A = 1$.

**Exercice 4** Soit $A$ une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit $M$ un majorant de $A$ tel qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A$ qui converge vers $M$.

1. Montrer que $\sup_A = M$.
2. Application : déterminer $\sup_A$ et $\inf_A$ pour $A = \{(-1)^{n+1} + \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$.

**Exercice 5** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'ensemble de réels $E_n = \{k + \frac{n}{k} | k \in \mathbb{N}^*\}$.

1. Montrer que $E_n$ admet une borne inférieure et que $\inf E_n = \inf_{k\in[[1,n]]} \left(k + \frac{n}{k}\right)$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \inf E_n \geq 2\sqrt{n}$. Dans quels cas y a-t-il égalité $\inf E_n = 2\sqrt{n}$ ?

**Exercice 6** 0n définit l'ensemble de réels $E = \{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} | m \in \mathbb{N}^*, \ n \in \mathbb{N}^*\}$. Déterminer $\inf E$ et $\sup E$.

**Exercice 7** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{Z}, \ E(x+n) = E(x) + n$.

**Exercice 8** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x)$.

**Exercice 9** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} E(x + \frac{k}{n}) = E(nx)$.

**Exercice 10** Montrer que toute suite extraite d'une suite convergente est convergente de même limite.

**Exercice 11** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On suppose que les suites extraites $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Montrer qu'elles ont même limite et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**Exercice 12** Montrer que la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

**Exercice 13** Montrer que la suite $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

**Exercice 14** **Moyenne de Cesaro**.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $l$. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^n u_p$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$.
2. Réciproquement, considérer l'une des suites $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$, et conclure.
3. On suppose, de plus, que $(u_n)$ une suite croissante. Montrer que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$.

**Exercice 15** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $l$. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^n pu_p$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{l}{2}$.

**Exercice 16** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui vérifie $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = l$. Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{p=1}^n a_p}{n^2}.$$

**Exercice 17** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $l$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $l'$. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^n u_p v_{n-p}$. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $ll'$.

**Exercice 18** Prouver que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{p=1}^n p!}{n!} = 1.$$

**Exercice 19** Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{n+p}$ est monotone et convergente ; montrer que la suite de terme général $v_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{2n+2p+1}$ est monotone et convergente.

**Exercice 20** Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$ est convergente et que $\frac{1}{2} \leq \lim_{n\to\infty} u_n \leq 1$.

**Exercice 21** On considère les deux suites de termes généraux $u_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$, pour $n \geq 1$. Montrer qu'elles sont adjacentes. Montrer que leur limite commune n'est pas rationnelle.

**Exercice 22** Soit la suite de terme général $u_n = \cos(n!\pi x)$, où $x$ est un réel donné. Montrer que si $x$ est rationnel, $(u_n)$ est convergente. La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 23** Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'entiers naturels non nuls. Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels non nuls tels que $q_n$ divise $q_{n+1}$, avec $\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{q_{n+1}} = 0$. Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{q_k}$ converge vers une limite non rationnelle.

**Exercice 24** Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq -\frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

**Exercice 25** Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq \frac{2}{3}$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$.

**Exercice 26** Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \leq 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.

**Exercice 27** Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$.

**Exercice 28** **Suites homographiques**. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n}$.

**Exercice 29** **Suites homographiques**. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1-u_n}$.

**Exercice 30** **Suites à récurrence linéaire**. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}+2u_n}{3}$.

**Exercice 31** **Suites à récurrence linéaire**. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$, $u_2 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+3} = \frac{8u_{n+2}-5u_{n+1}+u_n}{4}$.

**Exercice 32** Etudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0$ et $v_0$ réels positifs et les relations

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

et

$$v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

**Exercice 33** Etudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $v_0 \in \mathbb{R}$ et les relations

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$$

et

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

## Références

[1] D. Duverney, S. Heumez, G. Huvent, *Toutes les mathématiques. MPSI PCSI PTSI TSI*, Ellipses, 2004.

[2] M. Messeri, *Exercices de mathématiques. 2. Analyse I*, Belin, Collection DIA, 1987.