LA FORMULE DE STIRLING

Denis Vekemans *

On se propose de donner un équivalent de $n!$ pour n au voisinage de l'infini.

Question 1 : Montrer que la suite de terme général

$$u_n = \frac{e^n \cdot n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

est convergente. On note alors s sa limite.

On pourra introduire $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Solution :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e(n+1)}{(n+1)(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Donc,

$$\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = 1 - (n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n}).$$

Puis,

$$\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = 1 - (n+\frac{1}{2})[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})].$$

Et, enfin,

$$\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = -\frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente (pour une leçon d'oral 1, on pourrait montrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$). Donc, le produit $\frac{u_{n+1}}{u_n}\frac{u_n}{u_{n-1}}\dots\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_{n+1}}{u_0}$ est convergent. Puis, on peut poser $\lim_{n\to\infty} u_n = s$.

Question 2 : Pour $n \in I\!N$, on considère les intégrales de Wallis :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt.$$

Donner une relation entre I_n et I_{n-2}. Expliciter I_{2n+1} et I_{2n} en fonction de n.

Solution : Par une simple intégration par partie, il vient que

$$\frac{I_n}{I_n - 2} = \frac{n-1}{n}.$$

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Donc, comme $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, il vient que

$$I_{2p} = \frac{\pi(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2},$$

et

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Question 3 : Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1.$$

En déduire la valeur de s et conclure.

Solution : on obtient facilement la décroissance de (I_n) car $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t - 1)(\sin t)^n dt \leq 0$. Donc, $I_n \geq I_{n+1} \geq I_{n+2}$. Puis, $\frac{I_n}{I_n} \geq \frac{I_{n+1}}{I_n} \geq \frac{I_{n+2}}{I_n}$, car $I_n \geq 0$. Et, enfin, $1 \geq \frac{I_{n+1}}{I_n} \geq \frac{n+1}{n+2}$, ce qui montre que $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$. On a obtenu que

$$n! \sim \frac{s \cdot n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}.$$

Le calcul de $\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}$ nous donne alors :

$$\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \frac{\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}}{\frac{\pi(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2}}.$$

Puis,

$$\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \frac{2^{4p+1}(p!)^4}{\pi((2p)!)^2(2p+1)}.$$

Et, en utilisant l'équivalent donné ci-haut pour $n!$, on trouve

$$\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \sim \frac{2^{4p+1}(\frac{s\cdot p^{p+\frac{1}{2}}}{e^p})^4}{\pi(\frac{s\cdot(2p)^{2p+\frac{1}{2}}}{e^{2p}})^2(2p+1)}.$$

En développant,

$$\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \sim \frac{e^{4p}2^{4p+1}s^4p^{4p+2}}{\pi e^{4p}(2p)^{4p+1}s^2(2p+1)}.$$

Enfin, comme $\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \sim \frac{s^2}{2\pi} = 1$, on déduit, $s = \sqrt{2\pi}$.

Références

[1] M. Messeri, *Exercices de mathématiques. 2. Analyse I*, Belin, Collection DIA, 1987.