Résolution de systèmes linéaires

Denis Vekemans [*]

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Considérons alors le système linéaire d'inconnue $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$Ax = b.$$

1 La méthode du pivot de Gauss

On pose $A = A^{(1)}$ et $b = b^{(1)}$.

La technique du pivot de Gauss consiste à transformer le système initial en un système triangulaire supérieur.

$$A^{(1)}x = b^{(1)} \Longleftrightarrow A^{(2)}x = b^{(2)} \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow A^{(n)}x = b^{(n)},$$

où

$$A^{(i+1)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(i+1)} & \ldots & a_{1,i}^{(i+1)} & a_{1,i+1}^{(i+1)} & \ldots & a_{1,n}^{(i+1)} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{i,i}^{(i+1)} & a_{i,i+1}^{(i+1)} & \ldots & a_{i,n}^{(i+1)} \\ \vdots & & 0 & a_{i+1,i+1}^{(i+1)} & \ldots & a_{i+1,n}^{(i+1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{n,i+1}^{(i+1)} & \ldots & a_{n,n}^{(i+1)} \end{pmatrix}, \ \forall i \in \{0,\ 1, \ldots,\ n-1\}.$$

On pose alors $\widetilde{A^{(i+1)}} = (A^{(i+1)}|\ b^{(i+1)}),\ \forall i \in \{0,\ 1, \ldots,\ n-1\}$.

[*]Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Ainsi, lorsque

$$G^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & \vdots & -g_{i+1,i} & 1 & 0 & & \\ & & \vdots & -g_{i+2,i} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -g_{i+1,i} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \forall i \in \{1,\ 2, \dots,\ n-1\},$$

avec $g_{j,i} = \frac{a^{(i)}_{j,i}}{a^{(i)}_{i,i}}$, $\forall j \in \{i+1,\ i+2, \dots,\ n\}$, on obtient $\widetilde{A^{(i+1)}} = G^{(i)}\widetilde{A^{(i)}}$.

On a supposé que $a^{(i)}_{i,i} \neq 0$, $\forall i \in \{1,\ 2, \dots,\ n-1\}$ (sinon, on opère une permutation sur les lignes).

Par suite, $\widetilde{A^{(n)}} = G^{(n-1)}G^{(n-2)} \dots G^{(1)}\widetilde{A^{(1)}}$.

On a : $A = LU$ avec $U = A^{(n)}$ qui est triangulaire supérieure et $L = \left[G^{(n-1)}G^{(n-2)} \dots G^{(1)}\right]^{-1}$ qui est triangulaire inférieure à diagonale unité.

Puis,

$$\begin{aligned} Ax = b &\iff LUx = b \\ &\iff A^{(n)}x = Ux = L^{(-1)}b = b^{(n)} \end{aligned}$$

Théorème 1

Soit A une matrice inversible telle que $A = LU$ avec L qui est triangulaire inférieure à diagonale unité et U qui est triangulaire supérieure. Les matrices L et U sont définies de façon unique.

Première démonstration

Supposons qu'il existe deux décompositions $A = L_1U_1$ et $A = L_2U_2$. Comme A est inversible, L_1, L_2, U_1 et U_2 le sont également. De $L_1U_1 = L_2U_2$, on tire

$$\underbrace{\underbrace{L_2^{-1}}_{\text{triangulaire supérieure}} L_1}_{\text{triangulaire supérieure}} = \underbrace{U_2 \underbrace{U_1^{-1}}_{\text{triangulaire inférieure à diagonale unité}}}_{\text{triangulaire inférieure à diagonale unité}}.$$

Puis, $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I_n$, et $L_1 = L_2$ et $U_1 = U_2$.

La première démonstration est plus simple, mais elle présuppose qu'on a montré auparavant que l'inverse d'une matrice trianglaire supérieure (respectivement inférieure) est triangulaire supérieure (respectivement inférieure) au même titre que l'inverse d'une matrice trianglaire inférieure (respectivement supérieure) à diagonale unité est triangulaire inférieure (respectivement supérieure) à diagonale unité.

Deuxième démonstration

On pose : $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n\ ;\ 1 \leq j \leq n}$; $L = (l_{i,j})_{1 \leq i \leq n\ ;\ 1 \leq j \leq n}$ [REMARQUE : on a $l_{i,i} = 1$ et $l_{i,j} = 0$ si $i < j$] ; $U = (u_{i,j})_{1 \leq i \leq n\ ;\ 1 \leq j \leq n}$ [REMARQUE : on a $u_{i,j} = 0$ si $j < i$].

Il s'ensuit :

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} l_{i,k}u_{k,j},\ \forall 1 \leq i \leq n\ ;\ 1 \leq j \leq n.$$

Puis,

$$a_{i,j} = l_{i,1}u_{1,j} + l_{i,2}u_{2,j} + \ldots + l_{i,i-1}u_{i-1,j} + u_{i,j},\ \forall 1 \leq i \leq j \leq n,$$

et

$$a_{i,j} = l_{i,1}u_{1,j} + l_{i,2}u_{2,j} + \ldots + l_{i,j)}u_{j,j},\ \forall 1 \leq j < i \leq n.$$

Tout d'abord, une remarque indispensable : comme une décomposition LU existe, de $A = LU$, on déduit

$$\underbrace{det(A)}_{\neq 0 \text{ car } A \text{ est inversible}} = \underbrace{det(L)}_{=1} \cdot \underbrace{det(U)}_{=\prod_{i=1}^{n} u_{i,i}}$$

puis $u_{i,i} \neq 0,\ \forall 1 \leq i \leq n$, quelle que soit cette décomposition LU.

En faisant varier j de 1 à n pour $i = 1$, on obtient : $\underbrace{a_{1,j}}_{\text{connu}} = u_{1,j},\ \forall j \geq 1.$

On déduit ici la première ligne de la matrice U de façon unique et $u_{1,1} \neq 0$.

En faisant varier j de 1 à n pour $i = 2$, on obtient :

- $\underbrace{a_{2,1}}_{\text{connu}} = l_{2,1} \underbrace{u_{1,1}}_{\text{connu et non nul}}$;
  On déduit ici la deuxième ligne de la matrice L de façon unique.
- $\underbrace{a_{2,j}}_{\text{connu}} = \underbrace{l_{2,1}}_{\text{connu}} \underbrace{u_{1,j}}_{\text{connu}} + u_{2,j},\ \forall j \geq 2.$
  On déduit ici la deuxième ligne de la matrice U de façon unique et $u_{2,2} \neq 0$.

...

En faisant varier j de 1 à n pour i quelconque, on obtient :

- $\underbrace{a_{i,1}}_{\text{connu}} = l_{i,1} \underbrace{u_{1,1}}_{\text{connu et non nul}}$;
- $\underbrace{a_{i,2}}_{\text{connu}} = \underbrace{l_{i,1}}_{\text{connu}} \underbrace{u_{1,2}}_{\text{connu}} + l_{i,2} \underbrace{u_{2,2}}_{\text{connu et non nul}}$;
- $\ldots$;
- $\underbrace{a_{i,i-1}}_{\text{connu}} = \underbrace{l_{i,1}}_{\text{connu}} \underbrace{u_{1,i-1}}_{\text{connu}} + \underbrace{l_{i,2}}_{\text{connu}} \underbrace{u_{2,i-1}}_{\text{connu}} + \ldots + l_{i,i-1} \underbrace{u_{i-1,i-1}}_{\text{connu et non nul}}$;
  On déduit ici la $i$ième ligne de la matrice L de façon unique.
- $\underbrace{a_{i,j}}_{\text{connu}} = \underbrace{l_{i,1}}_{\text{connu}} \underbrace{u_{1,j}}_{\text{connu}} + \underbrace{l_{i,2}}_{\text{connu}} \underbrace{u_{2,j}}_{\text{connu}} + \ldots + \underbrace{l_{i-1,i-1}}_{\text{connu}} \underbrace{u_{i-1,j}}_{\text{connu}} + u_{i,j},\ \forall j \geq i.$
  On déduit ici la $i$ième ligne de la matrice U de façon unique et $u_{i,i} \neq 0$.

Puis, L et U sont ainsi déterminés de façon unique.

Théorème 2

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n\ ;\ 1 \leq j \leq n}$ une matrice inversible. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *il existe L et U telles que $A = LU$ avec L qui est triangulaire inférieure à diagonale unité et U qui est triangulaire supérieure ;*
2. $\det(A_k) \neq 0,\ \forall k \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, *avec* $A_k = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq k\ ;\ 1 \leq j \leq k}$.

Démonstration

$1 \Longrightarrow 2$. Comme $A = LU$, on déduit $A_k = L_k U_k$, avec $L_k = (l_{i,j})_{1\leq i\leq k\ ;\ 1\leq j\leq k}$ et $U_k = (u_{i,j})_{1\leq i\leq k\ ;\ 1\leq j\leq k}$. Or, A est inversible, donc $\det(A) = \det(U) \neq 0$, puis $\prod_{i=1}^{n} \underbrace{a_{i,i}^{(n)}}_{=a_{i,i}^{(i)}} \neq 0$, ce qui implique $\prod_{i=1}^{k} \underbrace{a_{i,i}^{(i)}}_{a_{i,i}^{(k)}} \neq 0$, donc $\det(A_k) = \det(U_k) \neq 0$.

$2 \Longrightarrow 1$. $\det(A_k) \neq 0,\ \forall 1 \leq k \leq n$.
$\det(A_1) \neq 0 \Longrightarrow a_{1,1}^{(1)} \neq 0$.
Si $a_{1,1}^{(1)} \neq 0$, la matrice $G^{(1)}$ est définie.
Ensuite, de $A_2^{(2)} = G_2^{(1)} A_2$, on tire $\underbrace{\det(A_2^{(2)})}_{=\prod_{i=1}^{2} a_{i,i}^{(i)}} = \underbrace{\det(G_2^{(1)} A_2)}_{\det(A_2)\neq 0}$, et $a_{2,2}^{(2)} \neq 0$.
Supposons avoir montré que $a_{i,i}^{(i)} \neq 0,\ \forall i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$ et montrons que $a_{k+1,k+1}^{(k+1)} \neq 0$.
Si $a_{i,i}^{(i)} \neq 0,\ \forall i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$, les matrices $G^{(1)}$, $G^{(2)}$, …, $G^{(k)}$ sont définie.
Ensuite, de $A_{k+1}^{(k+1)} = G_{k+1}^{(k)} G_{k+1}^{(k-1)} \ldots G_{k+1}^{(1)} A_{k+1}$, on tire $\underbrace{\det(A_{k+1}^{(k+1)}}_{=\prod_{i=1}^{k+1} a_{i,i}^{(i)}} = \underbrace{\det(G_{k+1}^{(k)} G_{k+1}^{(k-1)} \ldots G_{k+1}^{(1)} A_{k+1})}_{\det(A_{k+1})\neq 0}$, et $a_{k+1,k+1}^{(k+1)} \neq 0$.

2 La méthode de Cholesky

On suppose de plus que la matrice A est définie positive.

Théorème 3

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *A est symétrique définie positive ;*
2. *il existe L triangulaire inférieure inversible telle que $A = LL^t$.*

Démonstration

$2 \Longrightarrow 1$. Il existe L triangulaire inférieure inversible telle que $A = LL^t$.
Alors, A est trivialement symétrique.
On a $(Ax, x) = (LL^t x, x) = (L^t x, L^t x) = ||L^t x||^2 \geq 0$ (A est positive).
Et, $(Ax, x) = 0 \Longrightarrow ||L^t x|| = 0 \overset{L \text{ est inversible}}{\Longrightarrow} x = 0$ (A est définie).

$1 \Longrightarrow 2$. Pour $n = 1$, $A = \lambda > 0$. Donc $L = L^t = \sqrt{\lambda}$.
On suppose la propriété vraie au rang $n - 1$ et on la montre au rang n.
On pose

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & v \\ \hline v^t & \alpha \end{array}\right).$$

A est symétrique définie positive, donc B aussi. Ainsi, par hypothèse de récurrence, $B = TT^t$. Si on pose

$$L = \left(\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline w^t & \beta \end{array}\right),$$

alors
$$L = \left(\begin{array}{c|c} T^t & w \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right),$$
et
$$LL^t = \left(\begin{array}{c|c} TT^t & Tw \\ \hline (Tw)^t & w^tw+\beta^2 \end{array}\right),$$
et si $Tw = v$ et $w^tw + \beta^2 = \alpha$, alors $LL^t = A$. Est-ce possible ?
On pose $w = T^{-1}v$ (T est inversible et L, par conséquent, aussi, par définition de L). Puis, $\beta^2 = \alpha - w^tw = \alpha - (T^{-1}v)^tT^{-1}v = \alpha - v^tB^{-1}v > 0$ (car si $x = \begin{pmatrix} B^{-1}v \\ -1 \end{pmatrix}$, alors $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ v^tB^{-1}v - \alpha \end{pmatrix}$, puis $(Ax, x) = \alpha - v^tB^{-1}v > 0$ (car A est définie positive).

$$\begin{aligned} Ax = b &\iff LL^tx = b \\ &\iff \begin{cases} Ly = b \text{ système triangulaire pour trouver } y \\ L^tx = y \text{ système triangulaire pour trouver } x \end{cases} \end{aligned}$$

Construction de la matrice L qui soit triangulaire inférieure dans $A = LL^t$. $L = (l_{i,j})_{1\le i\le n\ ;\ 1\le j\le n}$ et $A = (a_{i,j})_{1\le i\le n\ ;\ 1\le j\le n}$. Ainsi,
$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{i,k}l_{j,k} = a_{j,i}.$$
On détermine la première colonne de L par
$$\begin{cases} a_{1,1} = l_{1,1}^2,\ a_{1,1} > 0 \\ a_{i,1} = l_{i,1}l_{1,1},\ i \ge 2,\ \text{car } l_{1,1} \ne 0 \end{cases}$$

On suppose connues les $k-1$ premières colonnes de L. On détermine la $k$ième colonne de L par
$$\begin{cases} a_{k,k} = l_{k,k}^2 + \sum_{j=1}^{k-1} \underbrace{l_{k,j}^2}_{\text{connus}},\ a_{k,k} > 0 \\ a_{i,k} = l_{i,k}l_{k,k} + \sum_{j=1}^{k-1} \underbrace{l_{k,j}l_{i,j}}_{\text{connus}},\ i \ge k+1,\ \text{car } l_{k,k} \ne 0 \end{cases}$$

3 La méthode de Households

On note : $||.|| = ||.||_2$.

Théorème 4
Soit $u \in \mathbb{R}^n$, tel que $||u|| = 1$. Alors, $H = I - 2uu^t$ est symétrique et orthogonale (i.e. $H = H^t = H^{-1}$).

Démonstration $H^t = H$ (trivial). $H^2 = (I - 2uu^t)^2 = I - 4uu^t + 4u\underbrace{u^tu}_{=1}u^t = I$.

Théorème 5
Soit $v \in \mathbb{R}^n$, tel que $v \ne 0$. Alors, il existe H symétrique (i.e. $H^t = H$) et orthogonale (i.e. $H^t = H^{-1}$), telle que $Hv = \alpha e_1$ où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration

On suppose $H = I - 2uu^t$ avec u inconnu tel que $||u|| = 1$.

D'une part, $||Hv|| = ||\alpha e_1||$ et d'autre part, $||Hv|| = ||v||$.

$Hv = v - 2uu^tv = \alpha e_1 \Longrightarrow v - \alpha e_1 = 2uu^tv \Longrightarrow 2\underbrace{v^tv}_{=\alpha^2} - 2v^t\alpha e_1 = 4v^tuu^tv = 4||u^tv||^2 = 4(u^tv)^2$.

Mais, si on pose maintenant $s = 2u^tv$, on peut résumer :

$$\begin{cases} |\alpha| = ||v|| \\ s^2 = 2\alpha^2 - 2\underbrace{\alpha}_{\text{on le choisit du signe opposé à celui de } v_1} v1 \text{ où } v_1 \text{ est la première composante de } v \\ su = v - \alpha e_1 \end{cases}$$

et on trouve α et u qui satisfassent le théorème.

$A^{(1)} = A$ et $b^{(1)} = b$.

$$\begin{aligned} Ax = b &\iff A^{(1)}x = b^{(1)} \\ &\iff A^{(2)}x = b^{(2)} \\ &\dots \\ &\iff A^{(n)}x = b^{(n)} \end{aligned}$$

où

$$A^{(k)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1}^{(k)} & \dots & a_{1,k-1}^{(k)} & a_{1,k}^{(k)} & \dots & a_{1,n}^{(k)} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{k-1,k-1}^{(k)} & a_{k-1,k}^{(k)} & \dots & a_{k-1,n}^{(k)} \\ \hline \vdots & & 0 & a_{k,k}^{(k)} & \dots & a_{k,n}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{n,k}^{(k)} & \dots & a_{n,n}^{(k)} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1}^{(k)} & A_{1,2}^{(k)} \\ \hline 0 & A_{2,2}^{(k)} \end{array}\right), \ \forall k \in \{2,\ 3, \dots,\ n\},$$

et

$$b^{(k)} = \begin{pmatrix} b_1^{(k)} \\ b_2^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} c^{(k)} \\ \hline d^{(k)} \end{array}\right), \ \forall k \in \{2,\ 3, \dots,\ n\},$$

et on pose

$$H^{(k)} = \left(\begin{array}{c|c} I_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & \widetilde{H^{(k)}} \end{array}\right), \ \forall k \in \{2,\ 3, \dots,\ n\},$$

où $\widetilde{H^{(k)}} = I_{n+1-k} - 2\widetilde{u^{(k)}}\widetilde{u^{(k)}}^t$ est telle que $\widetilde{H^{(k)}}v = \alpha e_1 \in \mathbb{R}^{n+1-k}$ et où $v = \begin{pmatrix} a_{k,k}^{(k)} \\ a_{k+1,k}^{(k)} \\ \vdots \\ a_{n,k}^{(k)} \end{pmatrix}$, ce qui est possible d'après le théorème préliminaire. On aura alors

$$A^{(k+1)} = H^{(k)}A^{(k)} = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1}^{(k)} & A_{1,2}^{(k)} \\ \hline 0 & \widetilde{H^{(k)}}A_{2,2}^{(k)} \end{array}\right)$$

et

$$b^{(k+1)} = H^{(k)}b^{(k)} = \left(\begin{array}{c} c^{(k)} \\ \hline \widetilde{H^{(k)}}d^{(k)} \end{array}\right)$$

$A^{(n)} = H^{(n)}H^{(n-1)}\dots H^{(2)}A^{(1)}$ (triangulaire supérieure) et $b^{(n)} = H^{(n)}H^{(n-1)}\dots H^{(2)}b^{(1)}$.

Théorème 6
Avec les notations précédentes, $\det(A) = (-1)^{n-1}\det(A^{(n)})$

Démonstration $A^{(n)} = H^{(n)}H^{(n-1)}\dots H^{(2)}A^{(1)}$ avec $\det(H^{(k)}) = -1,\ \forall 1 \leq k \leq n-1$.

4 Méthode des moindres carrés

Pour cette section, on donne $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ $(m \geq n)$, $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
x est solution de $Ax = b$ au sens des moindres carrés, si $||Ax - b||_2$ est minimum.
Dans ce cas, il existe $Q \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, telle que

$$QA = T = \left(\begin{array}{c} \widetilde{T} \\ \hline 0 \end{array}\right)$$

où $\widetilde{T} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure et où Q soit le produit de n matrice orthogonale H (du type $H = I - 2uu^t$), par la méthode de Household̈er.

$$||Ax - b||_2 = ||QAx - Qb||_2 = ||Tx - Qb||_2.$$

On pose

$$Qb = \left(\begin{array}{c} \widetilde{Qb} \\ \hline \overline{Qb} \end{array}\right)$$

où $c = Qb \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et $\widetilde{c} = \widetilde{Qb} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.
D'où

$$||Ax - b||_2^2 = ||\widetilde{T}x - c||_2^2 + \sum_{i=n+1}^{m} c_i^2$$

qui sera minimum pour $x = \widetilde{T}^{-1}\widetilde{c}$.

Remarque : si $m = n$, $\widetilde{T} = T$, alors $x = T^{-1}Qb$ est la solution unique de l'équation $Ax = b$.