Inversion matricielle ; méthode de bordage

Denis Vekemans *

Soit A_n une matrice $n \times n$, inversible, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (on pourrait aussi s'intéresser au cas de $\mathbb{C}$) que l'on cherche à inverser.

On écrit A_n sous la forme suivante : $A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & u \\ v^t & \alpha \end{pmatrix}$, où A_{n-1} est une matrice $(n-1) \times (n-1)$, inversible, à valeurs dans $\mathbb{R}$, où u est un vecteur colonne de taille $(n-1)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, où v^t est un vecteur ligne de taille $(n-1)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et où α est une valeur de $\mathbb{R}^*$.

On appelle I_n la matrice $n \times n$ identité.

On cherche une matrice B_n sous la forme suivante : $B_n = \begin{pmatrix} B_{n-1} & u' \\ v'^t & \beta \end{pmatrix}$, où B_{n-1} est une matrice $(n-1) \times (n-1)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, où u' est un vecteur colonne de taille $(n-1)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, où v'^t est un vecteur ligne de taille $(n-1)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et où β est une valeur de $\mathbb{R}$, telle que $A_n B_n = I_n$. Si une telle matrice B_n existe, elle est unique et est l'inverse de A_n.

1. Si on considère comme inconnues B_n, u', v'^t, et β, donner un système d'équations linéaires que satisfont ces inconnues.
2. $\alpha - v^t A_{n-1}^{-1} u$ est noté s et est appelé complément de Schur de la matrice et est supposé non nul. Résoudre le système linéaire précédent.
3. Donner l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, en appliquant, par exemple, la méthode du pivot de Gauss ou encore la méthode directe $A^{-1} = \frac{1}{dét(A)} Co(A)^t$ où $dét(A)$ est le déterminant de A et $Co(A)$ la comatrice de A. En déduire l'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ en utilisant la méthode précédente.

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France