Déterminants – Systèmes linéaires

Denis Vekemans [*]

1 Introduction

Montrer qu'une application linéaire est inversible n'est à priori pas chose évidente. Le déterminant permettra, dans certains cas, de montrer très facilement si une matrice est ou non inversible. Il permettra aussi, toujours dans certains cas, d'obtenir facilement l'inverse d'une matrice. Enfin, il servira, mais c'est pour une leçon prochaine, à la diagonalisation et la trigonalisation des endomorphismes d'un espace vectoriel. Il constituera alors un pont entre la théorie des anneaux polynomiaux et celle de l'algèbre linéaire. Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne un corps. Rappelons qu'un corps est un espace vectoriel sur lui même de dimension 1.

2 Formes multilinéaires

Définition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit

$$f : \underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{p \text{ fois}} \longrightarrow \mathbb{K}.$$

f est une forme p-linéaire ou une forme multilinéaire (ou encore une p-forme linéaire) sur E si pour tout $i = 1, \ldots, p$, pour tout $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_p \in E$, l'application $x \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_p)$ est linéaire de E dans $\mathbb{K}$. On note $\mathcal{L}^p(E)$ l'ensemble des p-formes linéaires sur E.

Proposition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble des p-formes linéaires sur E, $\mathcal{L}^p(E)$ muni de l'addition des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ et de la multiplication par un scalaire, a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration. On montre sans peine que c'est un sous espace vectoriel de l'espace des fonctions définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

$\blacksquare$

Définition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit f une forme p-linéaire définie sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si $p = 2$, on dit que f est une forme bilinéaire. Si $p = 3$, on dit que f est une forme trilinéaire.

[*]Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Définition 3
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme p-linéaire est dite alternée si pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ vérifiant $\exists i, j \in \{1, 2, ..., p\},\ i \neq j,\ x_i = x_j$, alors $f(x_1, \ldots, x_p) = 0$. L'ensemble des formes p-linéaires alternées sur E est notée $\mathcal{A}^p(E)$.

Définition 4
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme p-linéaire est dite symétrique si pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$, pour tout $i, j \in \{1, 2, ..., p\}$ alors $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$.

Définition 5
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme p-linéaire est dite antisymétrique si pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$, pour tout $i, j \in \{1, 2, ..., p\}$ alors $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$.

Proposition 2
Si f est une p-forme linéaire antisymétrique et si k est un corps de caractéristique différente de 2 alors f est alternée.

Démonstration. Comme f est antisymétrique, pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ et pour tout $i, j \in \{1, 2, ..., p\}$ alors $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$.

Supposons que $x_i = x_j$.

L'égalité précédente devient : $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = -f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$, soit

$$2f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 0,$$

ce qui donne, $\mathbb{K}$ étant de caractéristique différente de 2 : $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 0$.

■

Avant de continuer, effectuons deux petits rappels à propos du groupe des permutations d'un ensemble fini.

Rappel 1.

- L'ensemble des bijections $\sigma : \{1, 2, ..., p\} \longrightarrow \{1, 2, ..., p\}$ est noté S_p. Une telle bijection est appelée une permutation de $\{1, 2, ..., p\}$.
- S_p muni de la loi de composition des applications possède une structure de groupe.
- Une permutation préservant tout les éléments de $\{1, 2, ..., p\}$ sauf deux qu'elle permute est appelée une transposition. Toute permutation est produit de transposition. Le nombre de transposition intervenant dans cette décomposition est indépendant de la décomposition (en transposition) choisie.

Rappel 2.

- Il existe une morphisme de groupe surjectif $\varepsilon : S_p \longrightarrow \{-1, 1\}$ où $\{-1, 1\}$ est muni de sa struture multiplicative. L'image de ε sur une permutation est appelée la signature de cette permutation.
- Si σ est élément de S_p alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^n$ où n est le nombre de transposition dans une décomposition de σ en produit de transposition.

Proposition 3

Soit f une forme p-linéaire alternée définie sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soient $v_1, \ldots, v_p$, p vecteurs de E. Soit aussi σ un élément de S_p. Alors

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(v_1, \ldots, v_p).$$

Démonstration. Comme les permutations sont des produits de transpositions, il suffit de montrer cette égalité pour une transposition. Soit $i, j \in \{1, 2, ..., p\}$ et soit τ la transposition de $\{1, 2, ..., p\}$ qui échange i et j.

On a clairement :

$$f(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(i)}, \ldots, v_{\tau(j)}, \ldots, v_{\tau(p)}) = f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_p) = -f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_p).$$

■

Proposition 4

L'ensemble des p-formes linéaires alternées sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, $\mathcal{A}^p(E)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des p-formes linéaires sur E, $\mathcal{L}^p(E)$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que la p-forme nulle est bien élément de $\mathcal{A}^p(E)$ et que la combinaison linéaire de deux p-formes linéaires alternées est encore une p-forme linéaire alternée.

■

3 Dimension de $\mathcal{A}^p(E)$ et déterminant

Proposition 1

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et p un entier naturel.

Si p est plus grand que la dimension de E alors $\mathcal{A}^p(E) = \{0\}$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{A}^p(E)$ et soient $v_1, \ldots, v_p$, p vecteurs non nuls de E. Comme E est de dimension finie (car $n < p$), l'un des vecteurs v_p, par exemple, est combinaison linéaire des $p-1$ autres vecteurs. Il existe donc $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ dans $\mathbb{K}$ tels que

$$v_p = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i v_i.$$

On peut alors écrire :

$$f(v_1, \ldots, v_{p-1}, v_p) = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i f(v_1, \ldots, v_{p-1}, v_i).$$

Mais comme f est alternée, pour tout $i = 1, ..., p-1$, $f(v_1, \ldots, v_{p-1}, v_i) = 0$. On a prouvé que $f(v_1, \ldots, v_{p-1}, v_p) = 0$. Cela étant vrai pour toute famille de p vecteurs de E, $v_1, \ldots, v_p$, f est identiquement nulle sur E.

■

Proposition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n avec $\mathbb{K}$ qui n'est pas de caractéristique 2. L'ensemble des n-formes linéaires alternées sur E : $\mathcal{A}^n(E)$ est de dimension 1 sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. Considérons une base $e = (e_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ de E. Considérons d'autre part une n-forme linéaire alternée f sur E ainsi qu'un n-uplet $(v_1,\dots,v_n)$ de vecteurs de E. Pour $i \in \{1,\dots,n\}$ et $j \in \{1,\dots,n\}$, il existe des scalaires $\alpha_{i,j} \in \mathbb{K}$ tels que pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, $v_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} e_i$. Considérons aussi l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des suites à n éléments et à valeurs dans $\{1,\dots,n\}$.

On peut alors écrire :

$$f(v_1,\dots,v_n) = \sum_{(i_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}\in\mathcal{S}_n} \alpha_{i_1,1}\dots\alpha_{i_n,n} f(e_{i_1},\dots,e_{i_n}). \tag{1}$$

Remarquons qu'il existe une bijection évidente entre $\mathcal{S}_n$ et S_n. Cette bijection est celle qui à une suite $(i_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ de $\mathcal{S}_n$ associe la permutation qui envoie l'entier m sur l'entier i_m.

Via cette remarque, on peut écrire :

$$f(v_1,\dots,v_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_{\sigma(1),1}\dots\alpha_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)}).$$

f étant alternée, pour tout $\sigma \in S_n$, quelques soient $v_1,\dots,v_p$, p vecteurs de E,

$$f(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(v_1,\dots,v_p).$$

Donc :

$$f(v_1,\dots,v_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_{\sigma(1),1}\dots\alpha_{\sigma(n),n}\varepsilon(\sigma) f(e_1,\dots,e_n).$$

Soit encore :

$$f(v_1,\dots,v_n) = \left(\sum_{\sigma\in S_n} \alpha_{\sigma(1),1}\dots\alpha_{\sigma(n),n}\varepsilon(\sigma)\right) f(e_1,\dots,e_n),$$

et posant

$$\Pi(v_1,\dots,v_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_{\sigma(1),1}\dots\alpha_{\sigma(n),n}\varepsilon(\sigma),$$

$v_1,\dots,v_n$ étant n vecteurs quelconques dans E :

$$\boxed{f(v_1,\dots,v_n) = \Pi(v_1,\dots,v_n)\cdot f(e_1,\dots,e_n).}$$

Il faut montrer que Π est une forme multilinéaire et alternée. On vérifie sans peine que Π est multilinéaire. Soient $v_1,\dots,v_n$ n vecteurs de E et soient $i,j \in \{1,\dots,n\}$ tels que $i<j$ et tels que $v_i = v_j$.

$$\begin{aligned}
\Pi(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n) &= \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_{\sigma(1),1}\dots\alpha_{\sigma(i),i}\dots\alpha_{\sigma(j),j}\dots\alpha_{\sigma(n),n}\varepsilon(\sigma)\\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_{\sigma(1),1}\dots\alpha_{\sigma(i),i}\dots \underbrace{\alpha_{\sigma(j),i}}_{=\alpha_{\sigma(j),j}\text{ car } v_i=v_j} \dots\alpha_{\sigma(n),n}\varepsilon(\sigma)
\end{aligned}$$

Soit τ la transposition qui échange i et j. τ préserve tout les autres éléments de $\{1,\dots,n\}$.

Donc :

$$\Pi(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_{\sigma(\tau(1)),1}\dots\alpha_{\sigma(\tau(j)),i}\dots\alpha_{\sigma(\tau(i)),i}\dots\alpha_{\sigma(\tau(n)),n}\varepsilon(\sigma).$$

Comme $\tau=\tau^{-1}$, et $\varepsilon(\sigma\circ\tau)=-\varepsilon(\sigma)$,

$$\begin{aligned}\Pi(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n) &= -\sum_{\underbrace{\sigma\in S_n}_{\text{ou } \sigma\circ\tau\in S_n}} \alpha_{\sigma(\tau(1)),1}\dots\alpha_{\sigma(\tau(j)),i}\dots\alpha_{\sigma(\tau(i)),i}\dots\alpha_{\sigma(\tau(n)),n}\varepsilon(\sigma\circ\tau)\\ &= -\sum_{\sigma\in S_n}\alpha_{\sigma(1),1}\dots\alpha_{\sigma(i),i}\dots\alpha_{\sigma(j),i}\dots\alpha_{\sigma(n),n}\varepsilon(\sigma)\end{aligned}$$

En conclusion $\Pi(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n) = -\Pi(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n)$ et comme $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, on déduit que $\Pi(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n)=0$ et Π est bien alternée.

■

Proposition 3

(et définition) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On appelle ***application déterminant*** *dans la base e l'application multilinéaire alternée qui à n vecteurs v_j pour $j\in\{1,\dots,n\}$ de E d'écriture $v_j=\sum_{i=1}^n \alpha_{i,j}e_i$ dans la base E associe la quantité :*

$$det_e(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n) = \sum_{\sigma\in S_n}\alpha_{\sigma(1),1}\dots\alpha_{\sigma(n),n}\varepsilon(\sigma).$$

Démonstration. Nous venons de démontrer que cette application est multilinéaire alternée.

■

Proposition 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Soit det_e l'application déterminant associée à cette base. Alors $det_e(e_1,\dots,e_n)=1$.

Démonstration. Il suffit de revenir à la définition du déterminant.

■

Proposition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Soit f une application n-linéaire alternée. Soient aussi $v_1,\dots,v_n$ n vecteurs de E.

$$f(v_1,\dots,v_n) = det_e(v_1,\dots,v_n)\cdot f(e_1,\dots,e_n).$$

Démonstration. Cette proposition n'est rien d'autre que la ré-écriture de celle démontrée au début de ce paragraphe et qui donne la dimension de $\mathcal{A}^n(E)$. Se reporter donc à la démonstration de cette proposition.

■

Proposition 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$. Alors la dimension de $\mathcal{A}^p(E)$ est donnée par $dim\mathcal{A}^p(E) = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démonstration. Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Notons $\mathcal{S}_p^{(n)}$ l'ensemble des suites à p éléments et à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$. Une suite élément de $\mathcal{S}_p^{(n)}$ sera notée $(i_k)_{k\in\{1,\ldots,p\}}$. Soient $v_1, \ldots, v_p$ p vecteurs de E. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$ il existe des scalaires $\alpha_{i,j} \in \mathbb{K}$ tels que pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, $v_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} e_i$.

Si f est une p-forme linéaire sur E,

$$f(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{(i_k)_{k\in\{1,\ldots,p\}} \in \mathcal{S}_p^{(n)}} \alpha_{i_1,1} \ldots \alpha_{i_p,p} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}). \tag{2}$$

La somme précédente est donc prise sur l'ensemble des suites appartenant à $\mathcal{S}_p^{(n)}$.

Etudions plus précisément $\mathcal{S}_p^{(n)}$. Une suite de $\mathcal{S}_p^{(n)}$ est caractérisée par :

- L'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre.
- L'ordre dans lequel elle prend ces valeurs.

Désignons par les entiers $k_1 < \ldots < k_p$ les p valeurs pouvant être prises par une suite donnée de $\mathcal{S}_p^{(n)}$. Soient $i_1, \ldots, i_p$ et $i'_1, \ldots, i'_p$ deux suites de $\mathcal{S}_p^{(n)}$ prenant leur valeurs dans $\{k_1, \ldots, k_p\}$. Il existe une unique permutation σ de S_p telle que $i_{\sigma(m)} = i'_m$ pour tout $m \in \{1, \ldots, p\}$. Réciproquement si $i_1, \ldots, i_p$ est une suite de $\mathcal{S}_p^{(n)}$ et que σ est une permutation de S_p, alors $i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(p)}$ est une autre suite de $\mathcal{S}_p^{(n)}$ prenant ses valeurs dans le même ensemble que la suite $(i_k)_{k\in\{1,\ldots,p\}}$. Le sous-ensemble de $\mathcal{S}_p^{(n)}$ des suites qui sont à valeur dans $\{k_1, \ldots, k_p\}$ peut donc être décrit par l'ensemble $\{k_{\sigma(1)}, \ldots, k_{\sigma(p)}; \sigma \in S_p\}$.

En conclusion $\mathcal{S}_p^{(n)}$ peut être décrit par :

$$\mathcal{S}_p^{(n)} = \bigcup_{1\leq k_1<\ldots<k_p\leq n} \left\{k_{\sigma(1)}, \ldots, k_{\sigma(p)}; \sigma \in S_p\right\}.$$

Ce partitionnement de $\mathcal{S}_p^{(n)}$ permet une autre écriture de la somme (2) :

$$f(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{1\leq k_1<\ldots<k_p\leq n} \sum_{\sigma\in S_p} \alpha_{k_{\sigma(1)},1} \ldots \alpha_{k_{\sigma(p)},p} f(e_{k_{\sigma(1)}}, \ldots, e_{k_{\sigma(p)}}).$$

Mais comme est alternée, ceci se ré-écrit :

$$f(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{1\leq k_1<\ldots<k_p\leq n} \sum_{\sigma\in S_p} \alpha_{k_{\sigma(1)},1} \ldots \alpha_{k_{\sigma(p)},p} \varepsilon(\sigma) f(e_{k_1}, \ldots, e_{k_p}).$$

Ou encore :

$$f(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{1\leq k_1<\ldots<k_p\leq n} \left(\sum_{\sigma\in S_p} \alpha_{k_{\sigma(1)},1} \ldots \alpha_{k_{\sigma(p)},p} \varepsilon(\sigma)\right) f(e_{k_1}, \ldots, e_{k_p}).$$

Notons $e_{k_1,\ldots,k_p}$ la famille libre $(e_{k_1}, \ldots, e_{k_p})$.

L'expression entre parenthèses est exactement égale à $det_{e_{k_1,\ldots,k_p}}(v_{k_1}, \ldots, v_{k_p})$.

Notons (pour $1 \leq k_1 < \ldots < k_p \leq n$), $\Pi_{(k_1,\ldots,k_p)}$ l'application qui à un n-uplet $(v_1, \ldots, v_n)$ associe le p-uplet $(v_{k_1}, \ldots, v_{k_p})$.

(2) admet comme écriture :

$$f(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_p \leq n} det_{e_{k_1,\ldots,k_p}} \underbrace{(v_{k_1}, \ldots, v_{k_p})}_{=\Pi_{(k_1,\ldots,k_p)}(v_1,\ldots,v_p)} \cdot f(e_{k_1}, \ldots, e_{k_p}),$$

ou

$$\boxed{f(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_p \leq n} det_{e_{k_1,\ldots,k_p}} \circ \Pi_{(k_1,\ldots,k_p)}(v_1, \ldots, v_p) \cdot f(e_{k_1}, \ldots, e_{k_p}).}$$

On vérifie sans peine que les fonctions $det_{e_{k_1,\ldots,k_p}} \circ \Pi_{(k_1,\ldots,k_p)}$ sont des formes p-linéaires alternées. $\mathcal{A}^p(E)$ est donc engendré par l'ensemble des formes

$$\mathcal{F} = \left\{ det_{e_{k_1,\ldots,k_p}} \circ \Pi_{(k_1,\ldots,k_p)} ; 1 \leq k_1 < \ldots < k_p \leq n \right\}.$$

Remarquons que l'ensemble des p-uplets $k_1, \ldots, k_p$ tels que $1 \leq k_1 < \ldots < k_p \leq n$ est de cardinal

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Donc $\mathcal{F}$ est de cardinal

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Montrons pour terminer que cette famille est libre. Considérons une famille de scalaires (λ_i) pour i allant de 1 à $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Réindexons cette suite de la façon suivante : $(\lambda_{k_1,\ldots,k_p})_{1 \leq k_1 < \ldots < k_p \leq n}$, ce qui sera bien plus pratique. Supposons que cette suite vérifie :

$$\sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_p \leq n} \lambda_{k_1,\ldots,k_p} det_{e_{k_1,\ldots,k_p}} \circ \Pi_{(k_1,\ldots,k_p)} = 0.$$

Par ailleurs, si $1 \leq m_1 < \ldots < m_p \leq n$, on définit $\pi(e_i)$ par $\pi(e_i) = e_{m_i}$ si $i \in \{m_1, \ldots, m_p\}$ et par $\pi(e_i) = 0$ si $i \notin \{m_1, \ldots, m_p\}$ étudions

$$\sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_p \leq n} \lambda_{k_1,\ldots,k_p} det_{e_{k_1,\ldots,k_p}} \circ \Pi_{(k_1,\ldots,k_p)}(\pi(e_1), \ldots, \pi(e_n)).$$

Chacun des termes $det_{e_{k_1,\ldots,k_p}} \circ \Pi_{(k_1,\ldots,k_p)}(\pi(e_1), \ldots, \pi(e_n))$ est nul sauf celui tel que $k_1 = m_1, \ldots, k_p = m_p$ qui vaut 1. Donc $\lambda_{m_1,\ldots,m_p} = 0$. On peut faire ce raisonement pour tout les p-uplets $m_1, \ldots, m_p$ tels que $1 \leq m_1 < \ldots < m_p \leq n$, ce qui prouve que chacun des $\lambda_{m_1,\ldots,m_p}$ est nul et que la famille $\mathcal{F}$ est libre.

■

4 Déterminant d'une matrice, d'une application linéaire

Définition 6

Soit $M = (\alpha_{i,j})_{i\in\{1,\ldots,n\};j\in\{1,\ldots,n\}}$ une matrice carrée à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. On appelle déterminant de la matrice M et on note $det(M)$ le déterminant des n vecteurs dont les coordonnées (dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$) sont données par les colonnes de M :

$$det(M) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_{\sigma(1),1}\ldots\alpha_{\sigma(n),n}\varepsilon(\sigma).$$

Proposition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension égale à n. Soient $e = (e_1,\ldots,e_n)$ et $e' = (e'_1,\ldots,e'_n)$ deux bases de E. Alors :

$$det_e(e'_1,\ldots,e'_n).det_{e'}(e_1,\ldots,e_n) = 1$$

($det_e(e'_1,\ldots,e'_n)$ est inversible dans $\mathbb{K}$, d'inverse $det_{e'}(e_1,\ldots,e_n)$).

Démonstration. L'application qui au n-uplet $(v_1,\ldots,v_n)$ de vecteurs de E associe $det_{e'}(v_1,\ldots,v_n)$ est n-linéaire alternée. Donc $det_{e'}(v_1,\ldots,v_n) = det_{e'}(e_1,\ldots,e_n).det_e(v_1,\ldots,v_n)$. Mais $det_{e'}(e'_1,\ldots,e'_n)$ donc $det_{e'}(e_1,\ldots,e_n)$ est inversible dans $\mathbb{K}$ d'inverse celui précisé dans la proposition.

■

Proposition 2

(et définition) Soit f une application linéaire définie sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Soit e une base de E. Si $M_e(f)$ désigne la matrice de f dans la base e, alors on appelle déterminant de f le scalaire de $\mathbb{K}$

$$det(f) = det_e M_e(f).$$

Démonstration. Soit $n = dimE$. Il s'agit bien évidemment de montrer que si e' est une autre base de E alors $det_e M_e(f) = det_{e'} M_{e'}(f)$, ce qui garantira le sens de cette définition. Rappelons que $M_e(f)$ est la matrice dont les vecteurs colonnes sont données par les coordonnées des $f(e_i)$ pour $i \in \{1,\ldots,n\}$ dans la base e. Donc $det_e M_e(f) = det_e(f(e_1),\ldots,f(e_n))$. De même $det_{e'} M_{e'}(f) = det_{e'}(f(e'_1),\ldots,f(e'_n))$.

Intéressons nous à l'application qui au n-uplet $(v_1,\ldots,v_n)$ de vecteurs de E associe $det_e(f(v_1),\ldots,f(v_n))$. Cette application est n-linéaire alternée. Donc $det_e(f(v_1),\ldots,f(v_n)) = det_e(f(e_1),\ldots,f(e_n))det_e(v_1,\ldots,v_n)$. En particulier, $det_e(f(e'_1),\ldots,f(e'_n)) = det_e(f(e_1),\ldots,f(e_n))det_e(e'_1,\ldots,e'_n)$.

Soit encore :

$$det_e(f(e'_1),\ldots,f(e'_n)) = det_e(M_e(f))det_e(e'_1,\ldots,e'_n).$$

D'autre part l'application qui au n-uplet $(v_1,\ldots,v_n)$ de vecteurs de E associe $det_{e'}(v_1,\ldots,v_n)$ est, elle aussi, n-linéaire alternée. Donc $det_{e'}(v_1,\ldots,v_n) = det_{e'}(e_1,\ldots,e_n)det_e(v_1,\ldots,v_n)$. Si on applique cette formule au n-uplets $(f(e'_1),\ldots,f(e'_n))$, on obtient $det_{e'}(f(e'_1),\ldots,f(e'_n)) = det_{e'}(e_1,\ldots,e_n)det_e(f(e'_1),\ldots,f(e'_n))$.

Ce qui s'écrit aussi :

$$det_{e'}(M_{e'}(f)) = det_{e'}(e_1,\ldots,e_n)det_e(f(e'_1),\ldots,f(e'_n)).$$

Donc :

$$det_e(f(e'_1),\dots,f(e'_n)) = det_e(M_e(f))det_e(e'_1,\dots,e'_n) = det_{e'}(M_{e'}(f))\left(det_{e'}(e_1,\dots,e_n)\right)^{-1}.$$

Puis, comme $det_e(e'_1,\dots,e'_n) = (det_{e'}(e_1,\dots,e_n))^{-1}$,

$$det_e(M_e(f)) = det_{e'}(M_{e'}(f)).$$

Donc $det(f)$ est bien indépendant de la base choisie.

■

5 Quelques propriétés du déterminant

Proposition 1

Si f et g sont deux endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors

$$det(g\circ f) = det(g)det(f).$$

Démonstration. Soit n la dimension de E et soit $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Considérons l'application qui au n-uplet $(v_1,\dots,v_n)$ de vecteurs de E associe $det_e(g(v_1),\dots,g(v_n))$. Cette application est n-linéaire alternée. Donc $det_e(g(v_1),\dots,g(v_n)) = det_e(g(e_1),\dots,g(e_n))det_e(v_1,\dots,v_n)$.

Appliquons cette formule au n-uplet $(f(e_1),\dots,f(e_n))$, on obtient :

$$det_e(g(f(e_1)),\dots,g(f(e_n))) = det_e(g(e_1),\dots,g(e_n))det_e(f(e_1),\dots,f(e_n)).$$

Ce qui est exactement

$$det(g\circ f) = det(g)det(f).$$

■

Proposition 2

Soit $M=(\alpha_{i,j})_{i\in\{1,\dots,n\};j\in\{1,\dots,n\}}$ une matrice carrée à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Soit M^T la transposée de la matrice M. Alors $det(M)=det(M^T)$.

Démonstration. Si $M=(\alpha_{i,j})_{i\in\{1,\dots,n\};j\in\{1,\dots,n\}}$ alors $M=(\alpha'_{i,j})_{i\in\{1,\dots,n\};j\in\{1,\dots,n\}}$, avec $\alpha'_{i,j}=\alpha'_{j,i}$ pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$ et $j\in\{1,\dots,n\}$ et

$$\begin{aligned} det(M^T) &= \sum_{\sigma\in S_n}\alpha'_{\sigma(1),1}\dots\alpha'_{\sigma(n),n}\varepsilon(\sigma)\\ &= \sum_{\sigma\in S_n}\alpha_{1,\sigma(1)}\dots\alpha_{n,\sigma(n)}\varepsilon(\sigma).\end{aligned}$$

Comme les applications σ de S_n sont des bijections, on peut écrire :

$$\alpha_{1,\sigma(1)}\dots\alpha_{n,\sigma(n)} = \alpha_{\sigma^{-1}(1),1}\dots\alpha_{\sigma^{-1}(n),n}$$

De plus, ε étant un morphisme de groupes multiplicatifs, $\varepsilon(\sigma\sigma^{-1})=1$ et donc $\varepsilon(\sigma)=\varepsilon(\sigma^{-1})$.

Cela donne :

$$\begin{aligned} det(M^T) &= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{1,\sigma(1)} \dots \alpha_{n,\sigma(n)} \varepsilon(\sigma) \\ &= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \alpha_{\sigma^{-1}(1),1} \dots \alpha_{\sigma^{-1}(n),n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \\ &= det(M). \end{aligned}$$

■

Proposition 3
Soit M une matrice triangulaire par bloc.

$$M = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & M' \\ \hline 0 & M_2 \end{array}\right)$$

où M_1 et M_2 sont des matrices carrées. Le déterminant de M est égal au produit de $det(M_1)$ par $det(M_2)$: $det(M) = det(M_1)det(M_2)$.

Démonstration. On suppose que M est une matrice carrée à n colonnes. On suppose que M_1 possède m colonnes. M_2 possède donc $n-m$ colonnes. Notons aussi $M = (\alpha_{i,j})_{i \in \{1,\dots,n\}; j \in \{1,\dots,n\}}$.

Considérons $\mathcal{A} = \{\sigma \in S_n; \sigma(\{1,\dots,m\}) = \{1,\dots,m\}\}$.

Si σ n'est pas élément de $\mathcal{A}$ alors il existe un entier $i \in \{1,\dots,m\}$ tel que $\sigma(i) \in \{m+1,\dots,n\}$. Pour cet entier i, $\alpha_{\sigma(i),i} = 0$ et $\alpha_{\sigma(1),1} \dots \alpha_{\sigma(n),n} \varepsilon(\sigma) = 0$.

Donc

$$det(M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}} \alpha_{\sigma(1),1} \dots \alpha_{\sigma(n),n} \varepsilon(\sigma).$$

Mais si $\sigma \in \mathcal{A}$ alors $\sigma(\{1,\dots,m\}) = \{1,\dots,m\}$ et $\sigma(\{m+1,\dots,n\}) = \{m+1,\dots,n\}$. σ est le produit d'une permutation de $\{1,\dots,m\}$ et d'une permutation de $\{m+1,\dots,n\}$. Notons S'_{n-m} l'ensemble des permutations de $\{m+1,\dots,n\}$.

On obtient :

$$\begin{aligned} det(M) &= \left(\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_{\sigma(1),1} \dots \alpha_{\sigma(m),m} \varepsilon(\sigma) \right) \left(\sum_{\sigma' \in S'_{n-m}} \alpha_{\sigma'(m+1),m+1} \dots \alpha_{\sigma'(n),n} \varepsilon(\sigma') \right) \\ &= det(M_1)det(M_2) \end{aligned}$$

■

Corollaire 4
Soit M une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. Alors le déterminant de M est égal au produit des éléments diagonaux de M.

Démonstration. C'est évident par récurrence sur l'ordre des matrices, en considérant

$$M_n = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_{1,1} & u^T \\ \hline 0 & M_{n-1} \end{array}\right)$$

et la propriété précédente.

■

Corollaire 5
L'application identique Id sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifie $det(Id) = 1$.

Démonstration. En effet, la représentation matricielle de Id dans une base de E est la matrice dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1 et qui a tout ses autres coefficients égaux à 0. Le déterminant d'une application linéaire étant celui d'une de ses représentations matricielles, on obtient le résultat prévu.

■

6 Méthodes de calcul du déterminant

Proposition 1
Soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficient dans $\mathbb{K}$.

On ne change pas la valeur du déterminant de M en :

- *effectuant une opération élémentaire sur les colonnes de M,*
- *effectuant une opération élémentaire sur les lignes de M.*

Démonstration. Si $M = (\alpha_{i,j})_{i\in\{1,\dots,n\};j\in\{1,\dots,n\}}$ alors M est composée des n vecteurs colonnes

$$v_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1,j} \\ \vdots \\ \alpha_{n,j} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de M est égal, par définition du déterminant d'une matrice, au déterminant de ces n vecteurs.

Effectuer une opération sur les colonnes de M revient à additionner λv_i où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \in \{1, \dots, n\}$ à v_j dans la colonne C_j de M. Soit M' la matrice obtenue en additionnant λv_i à v_j dans la colonne C_j de M. On a :

$$det(M') = det(v_1, \dots, v_{j-1}, v_j + \lambda v_i, v_{j+1}, \dots, v_n).$$

Par multilinéarité du déterminant, ceci devient :

$$det(M') = det(v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n) + \lambda det(v_1, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n),$$

et comme le déterminant est alterné, $det(v_1, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0$ et

$$det(M') = det(v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n) = det(M).$$

Pour ce qui est des opérations élémentaires sur les lignes, il suffit de considérer la transposée de M : une opération élémentaire sur les lignes de M est une opération élémentaire sur les colonnes de M^T, puis d'appliquer ce qui vient d'être démontré.

■

Proposition 2

Soit M une matrice carrée d'ordre n. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$det(\lambda M) = \lambda^n det(M).$$

Démonstration. Comme précédement il suffit de remarquer que si $v_1, \ldots, v_n$ sont les vecteurs colonnes constituant la matrice M alors $\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n$ sont ceux qui constituent λM et

$$det(\lambda M) = det(\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n).$$

L'application déterminant étant n-linéaire, on aboutit à l'égalité

$$\begin{aligned} det(\lambda M) &= det(\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n) \\ &= \lambda^n det(v_1, \ldots, v_n) \\ &= \lambda^n det(M). \end{aligned}$$

■

Proposition 3

Soit M une matrice carrée d'ordre n. On change le signe du déterminant de M si :

- *on permute deux colonnes de M,*
- *on permute deux lignes de M.*

Démonstration. M est constituée des n vecteurs colonnes v_i, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. Le déterminant de M est égal au déterminant de ses n vecteurs. Permuter deux colonnes de M revient à permuter les deux vecteurs corespondants dans la liste $(v_1, \ldots, v_n)$.

Supposons que les vecteurs permutés soient le $i$ème et le $j$ème ($i < j$). L'application déterminant étant alternée, $det(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = -det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$.

Pour ce qui est des lignes, il suffit de considérer la transposée de M.

■

Proposition 4

Développement du déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.

Soit $M = (\alpha_{i,j})_{i \in \{1,\ldots,n\}; j \in \{1,\ldots,n\}}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit $M_{p,q}$ la matrice carrée d'ordre $n-1$:

$$M_{p,q} = (\alpha_{i,j})_{i \in \{1,\ldots,n\}; j \in \{1,\ldots,n\}; i \neq p; j \neq q}.$$

Le déterminant de M admet comme développement par rapport à la $j$ème colonne :

$$det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{i,j} det(M_i, j),$$

et par rapport à la $i$ème ligne :

$$det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{i,j} det(M_i, j).$$

Démonstration. Considérons là encore les vecteurs colonnes de M :

$$v_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1,j} \\ \vdots \\ \alpha_{n,j} \end{pmatrix}.$$

Considérons aussi la base canonique e de $\mathbb{K}^n$. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $v_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} e_i$. Le déterminant de M est égal au déterminant des n vecteurs v_j. Considérant le $j$ème vecteur, par multilinéarité de l'application déterminant,

$$det(M) = det(v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} det(v_1, \dots, v_{j-1}, e_j, v_{j+1}, \dots, v_n).$$

Représentant les n vecteurs $(v_1, \dots, v_{j-1}, e_j, v_{j+1}, \dots, v_n)$ par une matrice M', on obtient pour M' l'écriture :

$$M' = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,j-1} & 0 & \alpha_{1,j+1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i-1,1} & \dots & \alpha_{i-1,j-1} & 0 & \alpha_{i-1,j+1} & \dots & \alpha_{i-1,n} \\ \alpha_{i,1} & \dots & \alpha_{i,j-1} & 1 & \alpha_{i,j+1} & \dots & \alpha_{i,n} \\ \alpha_{i+1,1} & \dots & \alpha_{i+1,j-1} & 0 & \alpha_{i+1,j+1} & \dots & \alpha_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,j-1} & 0 & \alpha_{n,j+1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$$

Par transposition des lignes et des colonnes de M', on transforme la matrice M' en la matrice M'' :

$$M'' = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{i,1} & \dots & \alpha_{i,j-1} & \alpha_{i,j+1} & \dots & \alpha_{i,n} \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & M_i, j & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix}$$

M'' est triangulaire par bloc. De plus, comme M'' est obtenue à effectuant $i-1$ transpositions sur les lignes de M' et $j-1$ transpositions sur les colonnes de M', $det(M') = (-1)^{i+j} det(M'')$. Mais $det(M'') = det(M_{i,j})$. Donc

$$det(M) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \alpha_{i,j} det(M_i, j).$$

Pour ce qui est du développement suivant les lignes, il suffit de refaire le même calcul avec la transposée de M.

■

Définition 7

$M = (\alpha_{i,j})_{i \in \{1,\dots,n\}; j \in \{1,\dots,n\}}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit $M_{p,q}$ la matrice carrée d'ordre $n-1$.

$$M_{p,q} = (\alpha_{i,j})_{i \in \{1,\dots,n\}; j \in \{1,\dots,n\}; i \neq p; j \neq q}.$$

On appelle matrice adjointe de la matrice M la matrice carré d'ordre n $M' = (\alpha'_{i,j})_{i \in \{1,\dots,n\}; j \in \{1,\dots,n\}}$ où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha'_{i,j} = (-1)^{i+j} det(M_{i,j})$.

Définition 8

On appelle comatrice de la matrice carrée M la transposée de la matrice adjointe de M.

Proposition 5

Si M est une matrice carrée d'ordre n et que M^{Co} est la comatrice de M alors

$$MM^{Co} = M^{Co}M = det(M)Id_n.$$

Démonstration. Supposons que $M = (\alpha_{i,j})_{i\in\{1,\dots,n\};j\in\{1,\dots,n\}}$ et que $M^{Co} = (\alpha_{i,j})_{i\in\{1,\dots,n\};j\in\{1,\dots,n\}}$. Alors $MM^{Co} = (\beta_{i,j})_{i\in\{1,\dots,n\};j\in\{1,\dots,n\}}$ avec $\beta_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k}\alpha'_{k,j}$.

Donc

$$\beta_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k}(-1)^{k+j}det(M_{k,j}). \tag{3}$$

- Supposons que $i < j$ et remplaçons dans la matrice M la $j$ème ligne par la $i$ème. Développons ensuite cette dernière matrice suivant cette $j$ème ligne. On obtient pour le déterminant de cette matrice exactement l'expression 3. Mais cette matrice possédant deux lignes égales a un déterminant nul. Donc si $i \neq j$, $\beta_{i,j} = 0$.
- Si $i = j$, $\beta_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k}(-1)^{k+i}det(M_{k,i})$ qui est exactement égal au développement de $det(M)$ suivant la $i$ème ligne. Donc $\beta_{i,i} = det(M)$.

En conclusion $MM^{Co} = det(M)Id_n$. Travaillons maintenant sur le produit $M^{Co}M$. Posons ici $M^{Co}M = (\beta'_{i,j})_{i\in\{1,\dots,n\};j\in\{1,\dots,n\}}$ avec $\beta'_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \alpha'_{i,k}\alpha_{k,j}$.

Donc

$$\beta'_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,j}(-1)^{i+k}det(M_{i,k}). \tag{4}$$

On refait alors comme précédemment en distinguant les cas $i \neq j$ et $i = j$.

■

Théorème 6

Soit M une matrice carrée d'ordre n.

M est inversible dans l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si son déterminant est non nul.

De plus, dans le cas où M est inversible, la matrice inverse de M, M^{-1} est donnée par :

$$M^{-1} = (det(M))^{-1}M^{Co},$$

et

$$(det(M))^{-1} = det(M^{-1}).$$

Démonstration. Si M est une matrice carrée inversible, alors il existe une matrice N de même ordre que M telle que $MN = NM = Id_n$. Donc $det(MN) = det(Id_n) = 1$. Mais $det(MN) = det(M)det(N)$. Donc $det(M)$ est inversible dans $\mathbb{K}$ (et est par conséquent non nul) et $(det(M))^{-1} = det(M^{-1})$.

Supposons que $det(M)$ est non nul et calculons. Notons M^{Co} la comatrice de M. La proposition précédente donne $MM^{Co} = M^{Co}M = det(M)Id_n$. Comme $det(M)$ est non nul, $det(M)$ est inversible et il en est de même de M. On obtient alors exactement l'expression voulue pour M^{-1}.

■

Le calcul de la matrice adjointe d'une matrice offre donc un moyen de calculer l'inverse de cette matrice. Ce calcul est cependant souvent très laborieux. Cette technique est utilisée en particulier pour résoudre des systèmes d'équations du premier degré (systèmes de Cramer).

7 Systèmes linéaires

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, on se propose de discuter de la résolution du système de p équations à n inconnues sur $\mathbb{K}$:

$$a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,n}x_n = b_i, \ \forall i \in \{1, \ldots, p\}.$$

On appelle $\mathcal{X}$ l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_n)$ satisfaisant le système. On appelle $M = (a_{i,j})_{i\in\{1,\ldots,p\};j\in\{1,\ldots,n\}}$ la matrice du système.

7.1 Cas de Cramer

Le système est carré ($n = p$) et le déterminant Δ de la matrice du système est non nul.

Il y a une solution et une seule, chaque inconnue x_i vaut $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ où Δ_i se déduit à partir de Δ en y remplaçant la $i$ème colonne par la colonne des termes constants.

7.2 Cas général : règle de Rouché

$M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

On cherche le rang de M. C'est l'unique $r \in \mathbb{N}$ tel que :

- il existe un déterminant δ d'ordre r extrait de A non nul,
- s'il existe des déterminants d'ordre $(r + 1)$ extraits de A, ils sont tous nuls.

δ est choisi (déterminant principal) ; ses lignes déterminent les équations principales, ses colonnes, les inconnues principales. Les autres équations et inconnues, s'il en existe, sont non principales.

A chaque équation non principale est attaché un déterminant caractéristique d'ordre $r + 1$ obtenu en adjoignant à δ :

- une $(r+1)$ème ligne composée des coefficients des inconnues principales dans l'équation non principale considérée,
- une $(r + 1)$ème colonne constituée des termes constants correspondants.

Ensuite,

- si l'un des $p - r$ déterminants caractéristiques d'ordre $r + 1$ est non nul, $\mathcal{X} = \emptyset$;
- si tous les $p - r$ déterminants caractéristiques d'ordre $r + 1$ sont nuls, le système est équivalent au système des r équations non principales : on donne des valeurs arbitraires aux $(n - r)$ inconnues non principales et on résout ensuite un système de Cramer par rapport aux inconnues principales dans les équations principales.

7.3 Cas particulier des systèmes homogènes

C'est le cas lorsque : $\forall i \in \{1, \ldots, p\},\ b_i = 0$.

$\mathcal{X}$ est dans ce cas un sous-espace vectoriel de dimension $(n-r)$ de $\mathbb{K}^n$.

8 Exercices

Exercice 1 Soit Δ un déterminant d'ordre $n \geq 3$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & \ldots & a_{4,n-2} & a_{4,n-1} & a_{4,n} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Un terme du déterminant s'écrit $a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n}\varepsilon(\sigma)$ où $\sigma \in S_n$.

Quel est le nombre maximal de termes non nuls dans ce déterminant ?

Exercice 2 Montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \ldots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \ldots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \ldots & a_n - b_n \end{vmatrix}, \ \forall (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{(2n)}$$

est nul si $n \geq 3$.

Exercice 3 On se donne $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ et $n \in \{2, 3, \ldots\}$.

Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin(\alpha_1 + \alpha_1) & \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \ldots & \sin(\alpha_1 + \alpha_n) \\ \sin(\alpha_2 + \alpha_1) & \sin(\alpha_2 + \alpha_2) & \ldots & \sin(\alpha_2 + \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin(\alpha_n + \alpha_1) & \sin(\alpha_n + \alpha_2) & \ldots & \sin(\alpha_n + \alpha_n) \end{vmatrix}$$

Exercice 4 Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1^k & 2^k & \ldots & n^k \\ 2^k & 3^k & \ldots & (n+1)^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^k & (n+1)^k & \ldots & (2n-1)^k \end{vmatrix}$$

est nul si $n \geq k+2$.

Aide : on pourra introduire les polynômes $P_j(X) = (X+j-1)^k,\ \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Exercice 5

1. Montrer que le déterminant de Vandermonde $\Delta_{a_1,\dots,a_n}$ défini par

$$\Delta_{a_1,\dots,a_n} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},\ \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n,$$

est donné par

$$\Delta_{a_1,\dots,a_n} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

2. Calculer le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix},\ \forall (a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4.$$

Exercice 6 On considère le déterminant cyclique d'ordre n dépendant de $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{C}$:

$$\Delta_n(u_1, \dots, u_n) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_n \\ u_n & u_1 & u_2 & \dots & u_{n-1} \\ u_{n-1} & u_n & u_1 & \dots & u_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_2 & u_3 & u_4 & \dots & u_1 \end{vmatrix}$$

Donner $\Delta_n(u_1, \dots, u_n)$ en fonction de $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{C}$.

Aide : posant $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, on pourra calculer $\Delta_n(u_1, \dots, u_n) V_n$, où

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \dots & \alpha^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha^{n-1} & \alpha^{2(n-1)} & \dots & \alpha^{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Exercice 7 Soient m et p deux entiers naturels tels que $m \geq p \geq 1$. Calculer le déterminant d'ordre

$p+1$

$$\Delta(m,p)=\begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \dots & \binom{m}{p} \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \dots & \binom{m+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{m+p}{0} & \binom{m+p}{1} & \dots & \binom{m+p}{p} \end{vmatrix}$$

Exercice 8 Soient $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R}$.

$$\Delta_{n+1}(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n)=\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & a_3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n & 0 \end{vmatrix}$$

Calculer $\Delta_{n+1}(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n)$.

Exercice 9 Soit M_n la matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels définie par :

$$M_n=\begin{pmatrix} r_1 & a & a & \dots & a \\ b & r_2 & a & \dots & a \\ b & b & r_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a \\ b & b & \dots & b & r_n \end{pmatrix}$$

On note J_n la matrice carrée de rang n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On note également p_n le polynôme

$$p_n(X)=\prod_{i=1}^{n}(r_i-X).$$

1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $det(M_n+\lambda J_n)=\phi_n$ est de la forme $\phi_n=\alpha_n+\lambda\beta_n$.
2. En déduire α_n et β_n dans le cas où $a \neq b$ (à l'aide de p_n).
3. Calculer $det(M_n)$ dans le cas où $a=b$.

Exercice 10 Soient $p \in \mathbb{C}$ et $q \in \mathbb{C}^*$. On note D_n le déterminant d'ordre n ($n \geq 1$) tel que

$$D_n = \begin{vmatrix} p & q & 0 & \dots & 0 \\ 1 & p & q & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & p & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & q \\ 0 & \dots & 0 & 1 & p \end{vmatrix}.$$

On note D'_n le déterminant d'ordre n ($n \geq 1$) tel que

$$D'_n = \begin{vmatrix} p & q & 0 & \dots & 0 \\ 2 & p & q & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & p & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & q \\ 0 & \dots & 0 & 1 & p \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que l'on a : $D_n = pD_{n-1} - qD_{n-2}$; $D'_n = D_n - qD_{n-2}$; $D'_n = pD'_{n-1} - qD'_{n-2}$.
2. En déduire D_n et D'_n.

Application numérique :
- $p = 2$, $q = 1$.
- $p = 1$, $q = 1$.

Exercice 11 $a, b, c \in \mathbb{R}$. Discuter et résoudre le système en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} ax + by + cz = 1 \\ cx + ay + bz = 1 \\ bx + cy + az = 1 \end{cases}.$$

Exercice 12 $\alpha \in \mathbb{C}$. Discuter et résoudre le système en $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} x + \alpha y + \alpha^2 z = 0 \\ \overline{\alpha} x + y + \alpha z = 0 \\ \overline{\alpha}^2 x + \overline{\alpha} y + z = 0 \end{cases}.$$

Exercice 13 Discuter et résoudre le système :

$$x_i + x_{i+1} = 2a_i,\ \forall i \in \{1, \dots, n-1\}\ ;\ x_n + x_1 = 2a_n,$$

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ étant donnés.

Application : peut-on construire un polygone du plan affine connaissant les milieux de ses côtés ?

Références

[1] Les-Mathématiques.net : http ://www.les-mathematiques.net/

[2] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 1. Algèbre*, Belin, Collection DIA, 1987.