

Développements limités et développements asymptotiques

Denis Vekemans *

Exercice 1 Soit f une fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles, admettant un développement limité d'ordre 2 en 0, a-t-on forcément l'existence de $f''(0)$?

Exercice 2 Soit f une fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles, dérivable, admettant un développement limité d'ordre 2 en 0, a-t-on forcément l'existence d'un développement limité de f' d'ordre 1 en 0 ?

Exercice 3 Donner le développement limité d'ordre n en 0 de la fonction f , d'une variable réelle, à valeurs réelles, définie par $f(x) = \frac{1+x^2}{(1+x)^3}$.

Exercice 4 Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^m-1}, \forall m \in \mathbb{N} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}, \forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, a \neq b \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x^2(e^{1/x} - e^{1/(x+1)}) & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1} \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x^a - a^x}, \forall a \in \mathbb{R}^{+*} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(\pi x) - \cos(\pi x/4)}{2^x - x^2} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x - \sin(1/x)}{e^x - e^{1/x}} & \lim_{x \rightarrow 2} (2^x + 3^x - 12)^{\tan(\pi x/4)} \end{array}$$

Exercice 5 Soit f une fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles, donnée par

$$f(x) = (\operatorname{ch} x)^{1/x}, \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

1. Prolonger f par continuité en 0.
2. Etude de f .

Exercice 6 Etudier les variations et tracer la courbe représentative de f , une fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles, donnée par

$$f(x) = (1 + \sin x)^{\cotan x}.$$

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Exercice 7 Le logarithme intégral.

$$\forall x \geq 2, \operatorname{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Donner un développement asymptotique de la fonction li , à tout ordre, en l'infini.

Références

- [1] M. Messeri, *Exercices de mathématiques. 2. Analyse I*, Belin, Collection DIA, 1987.