Géométrie affine

Denis Vekemans *

Exercice 1 Soient D_1 et D_2 deux droites d'un plan affine sécantes en O, deux autres droites Δ_1 et Δ_2 sécantes en $0'$. $D_1 \bigcap D_2 = \{O\}$; $D_1 \bigcap \Delta_1 = \{A\}$; $D_1 \bigcap \Delta_2 = \{B\}$; $D_2 \bigcap \Delta_1 = \{B'\}$; $D_2 \bigcap \Delta_2 = \{A'\}$; $\Delta_1 \bigcap \Delta_2 = \{O'\}$.

Montrer que les milieux de $[AA']$, $[BB']$ et $[OO']$ sont alignés.

Exercice 2 Dans un plan affine, on se donne un vrai triangle ABC, et les points $P \in (BC) \backslash \{B, C\}$, $Q \in (CA) \backslash \{C, A\}$, $R \in (AB) \backslash \{A, B\}$.

Montrer que pour que les droites (AP), (BQ) et (CR) soient concourantes, il faut et il suffit que

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1, \text{ [Théorème de Céva].}$$

Exercice 3 Dans un espace affine réel de dimension 3. Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan P_0. On note A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[CA]$ et C' le milieu de $[AB]$.

Soit P un plan parallèle à P_0 et O un point de l'espace n'appartenant ni à P ni à P_0.

La droite (OA) coupe le plan P en A'', la droite (OB) coupe le plan P en B'' et la droite (OC) coupe le plan P en C''.

Montrer que les droites $(A'A'')$, $(B'B'')$ et $(C'C'')$ sont concourantes ou parallèles.

Exercice 4 Déterminer le réel a pour que les deux droites d'équations :

$$D_1 : \left\{ \begin{array}{l} x - 2z = 1 \\ y = z + 2 \end{array} \right. \text{ et } D_2 : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{array} \right.$$

soient coplanaires et donner une équation de leur plan.

Exercice 5 Soient A, B, C trois points indépendants d'un plan affine E. Soient M_1 et M_2 deux points distincts de E définis par un triplet de coordonnées barycentriques (x_1, y_1, z_1) avec $x_1 + y_1 + z_1 = 1$ pour M_1 et (x_2, y_2, z_2) avec $x_2 + y_2 + z_2 = 1$ pour M_2 par rapport à (A, B, C).

1. A quelle condition un point M défini par un triplet de coordonnées barycentriques (x, y, z) avec $x + y + z = 1$ appartient-il à la droite (M_1M_2) ?

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

2. Soit P un point de coordonnées barycentriques (x_P, y_P, z_P) avec $x_P + y_P + z_P = 1$. Soit A_1 le milieu de $[BC]$ et A' le symétrique de P par rapport à A_1. Déterminer un système de coordonnées barycentriques $(x_{A'}, y_{A'}, z_{A'})$ avec $x_{A'} + y_{A'} + z_{A'} = 1$ de A' par rapport à (A, B, C).
3. Soit B_1 le milieu de $[CA]$ et B' le symétrique de P par rapport à B_1. Soit C_1 le milieu de $[AB]$ et C' le symétrique de P par rapport à C_1. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (BB') sont concourantes en un même point Q. Montrer que Q, P et G sont alignés (avec G isobarycentre de A, B et C).

Exercice 6 Dans un espace affine E de dimension n, on donne $n+1$ points M_i pour $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ affinement indépendants. Sur chaque droite (M_iM_{i+1}), on prend le point P_i défini par

$$\overrightarrow{P_iM_i} = v_i\overrightarrow{M_iM_{i+1}},\ \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ [(v_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}} \in \mathbb{R}].$$

Sur la droite $(M_{n+1}M_1)$, on prend le point P défini par

$$\overrightarrow{PM_{n+1}} = v\overrightarrow{M_1M_{n+1}},\ [v \in \mathbb{R}].$$

Montrer que les $n+1$ points P_i pour $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ appratiennent à un même hyperplan affine si et seulement si

$$(v-1)\prod_{i=1}^{n}(1+v_i) = v\prod_{i=1}^{n} v_i,\ \text{[théorème de Ménélaüs]}.$$

Exercice 7 On note $I_n = \{1, \ldots, n\}$. Soit, dans un espace affine E, la famille de points pondérés $\{(A_i, \alpha_i), i \in I_n\}$ telle que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$.

Soit $\sigma = \{J, J'\}$ une parition de I_n ($I_n = J \bigcup J'$ et $\emptyset = J \bigcap J'$) telle que $\sum_{i\in J} \alpha_i \neq 0$.

On associe G_σ le barycentre des points pondérés $\{(A_i, \alpha_i), i \in J\}$ et G'_σ le barycentre des points pondérés $\{(A_i, \alpha_i), i \in J'\}$.

Montrer que la direction de $\overrightarrow{G_\sigma G'_\sigma}$ est indépendante de σ.

Exercice 8 Dans un espace affine réel de dimension 3, on donne trois droites D_1, D_2 et D_3 deux à deux non coplanaires et parallèles à un même plan.

Montrer que les droites δ qui rencontrent D_1, D_2 et D_3 restent parallèles à un plan fixe.

Exercice 9 E est un espace affine de dimension 3, de direction $\overrightarrow{E}$. On note f le projection affine sur une droite D, parallèlement à un plan affine P et g le projection affine sur une droite Δ, parallèlement à ce plan affine P.

Etudier l'application

$$h : E \longrightarrow E; M \mapsto h(M) = bar(f(M), \lambda), (g(M), \mu),$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\lambda + \mu = 1$.

Exercice 10 Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier. Soit O l'isobarycentre de A, B, C, D.

Calculer $\cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$.

Exercice 11 A, B, C, D, E sont cinq points d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 et k un réel donné.

Quel est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que

$$||\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC}|| = ||\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}||.$$

Exercice 12 Dans le plan complexe orienté, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $1 + \imath$, $3 + 4\imath$, $4 - \imath$.

Déterminer l'unique similitude directe s telle que $s(A) = B$ et $s(B) = C$. Préciser centre, angle et rapport de s.

Exercice 13 Dans un plan vectoriel euclidien E, on donne $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vecteurs unitaires.

Soit $p(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$ et $q(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{v})\overrightarrow{v}$.

Montrer que $s = p + q - 2p \circ q$ est une similitude vectorielle directe.

Exercice 14 Soit t une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et h l'homothétie affine de centre O et de rapport k (avec $k \neq 1$).

Reconnaître les applications : $f_1 = t \circ h \circ t$; $f_2 = h^{-1} \circ t \circ h$; $f_3 = t \circ h \circ t^{-1}$.

Exercice 15 Soit P le plan affine d'équation $x + y + z + 1 = 0$ et s la symétrie orthogonale par rapport à P.

Définir analytiquement s.

Exercice 16 Trouver la droite symétrique de celle d'équations $x = y = 0$ par rapport au plan d'équation $x + 2y + 3z = 1$.

Exercice 17 E est un espace affine de dimension 3, muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Soit f l'endomorphisme de E définie par

$$f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x', y', z') \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} x' = -\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}y + z - \frac{3}{2} \\ y' = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - z - \frac{1}{2} \\ z' = -3x - 3y + z - 3 \end{array} \right. .$$

Reconnaître la transformation f.

Exercice 18 E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, muni d'un repère $\mathcal{R} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ orthonormé direct.

Déterminer la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour du vecteur $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

Exercice 19 E est un espace affine euclidien orienté de dimension 3, muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ orthonormé direct.

Soit f l'endomorphisme de E définie par

$$f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x', y', z') \text{ tel que } \begin{cases} x' = z - 2 \\ y' = x \\ z' = y \end{cases}.$$

Montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et un réel Θ tel que $f = t \circ r$ où t est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et r une rotation affine d'angle Θ et d'axe dirigé par $\overrightarrow{u}$.

Montrer que l'écriture $f = t \circ r$ est unique.

Exercice 20 E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, muni d'une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ orthonormée directe.

Soit T l'endomorphisme de E défini par sa matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-8}{15} & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-2}{3} & \frac{8}{15} \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau et l'image de T.
2. Ecrire la matrice de T dans une base orthonormée directe dont deux vecteurs seront dans l'image. En déduire une interprétation géométrique de T.

Exercice 21 Soient trois droites D_1, D_2, D_3 non parallèles d'un espace affine euclidien de dimension 3. A tout point M_1 de D_1, on associe la projection orthogonale M_2 de M_1 sur D_2, puis on associe la projection orthogonale M_3 de M_2 sur D_3, et enfin on associe la projection orthogonale M_4 de M_3 sur D_1.

Montrer qu'il existe $M_1 \in D_1$ tel que $M_1 = M_4$.

Exercice 22 E est un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

On définit le point A tel que $\overrightarrow{OA} = a\,\overrightarrow{i}$, le point B tel que $\overrightarrow{OB} = b\,\overrightarrow{j}$, le point O' tel que $\overrightarrow{OO'} = c\,\overrightarrow{k}$ (avec $abc \neq 0$) et le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$, puis les points A', B', C' tels que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{OO'}$.

Soient enfin s_1 la symétrie orthogonale par rapport à la droite (OA), s_2 la symétrie orthogonale par rapport à la droite (BB') et s_3 la symétrie orthogonale par rapport à la droite $(A'C')$.

Reconnaître $f = s_3 \circ s_2 \circ s_1$.

Exercice 23 Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle Γ d'équation

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - \gamma^2 = 0.$$

A quelle condition la droite Δ d'équation $ux + vy + w = 0$ est-elle tangente au cercle Γ ?

Exercice 24 O et A sont deux points d'un plan affine euclidien.

Quel est l'ensemble $\mathcal{H}$ des centres des cercles γ contenant A et tels que les tangentes menées de O à γ soient orthogonales ?

Exercice 25 Dans un plan affine euclidien, on se donne un point O et une droite Δ ($O \notin \Delta$). Un cercle variable Γ de rayon R donné contient O.

Déterminer l'ensemble γ décrit par le pôle M_0 de Δ par rapport à Γ.

Exercice 26 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On donne le point $A(a, a)$.

1. On considère un cercle contenant les points O et A. En désignant par t l'abscisse de son centre, former l'équation cartésienne du cercle Γ_t.

   Le cercle Γ_t coupe la droite (Ox) en O et en un second point K. Former l'équation cartésienne de la tangente D en K au cercle Γ_t.

2. Déterminer en fonction de t les coordonnées de la projection orthogonale H du point A sur la droite D.

   Quel est l'ensemble γ des points H quand t varie ?

Exercice 27 Soit Γ un billard circulaire et A un point intérieur à Γ.

Montrer qu'il est possible de repasser par A après deux réflexions sur la surface interne de Γ.

Exercice 28 Soient A et B deux points données distincts, $\overrightarrow{V}$ un vecteur donné.

Quel est l'ensemble S des points M tels que $\overrightarrow{AM} \bigwedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{V}$?

Exercice 29 Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté. On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \; ; \; \overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{x} \bigwedge \overrightarrow{w}.$$

L'application f est-elle linéaire ? injective ?

Comparer f et $f^{(3)} = f \circ f \circ f$.

Que conclure lorsque $||\overrightarrow{w}|| = 1$?

Exercice 30 Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, on se donne un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$.

Soit r la rotation d'axe $\overrightarrow{u}$ et d'angle de mesure Θ.

Montrer que l'on a pour tout vecteur $\overrightarrow{x}$:

$$r(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{u} + \cos(\Theta)[(\overrightarrow{u} \bigwedge \overrightarrow{x}) \bigwedge \overrightarrow{u}] + \sin(\Theta)[\overrightarrow{u} \bigwedge \overrightarrow{x}].$$

Exercice 31 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ sont quatre vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3 tels que :

$$\overrightarrow{a} \bigwedge \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0} \ ; \ \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0} \ ; \ \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d} = \overrightarrow{0}.$$

Discuter et résoudre sur E le système :

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} \bigwedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{b} \bigwedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{d} \end{cases}$$

On montrera que la condition $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ est nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution et que celle-ci est alors unique.

Exercice 32 Dans un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormé, on donne les quatre points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ et $D(-1,-1,-1)$.

Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 33 Dans un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormé, on se donne un point M_0 et la droite affine Δ contenant un point A et dirigée par $\overrightarrow{u}$. Calculer $d(m_0, \Delta)$ en fonction des données.

Application : $M_0(1,2,4), A(6,-4,1), \overrightarrow{u}(1,1,1)$ (repère orthonormé).

Exercice 34 $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est un repère orthonormé direct de l'espace.

(D_1) d'équations $2x + y + z = 2; x + y + z = 1$; (D_2) d'équations $x - y + z = 1; 2x - y + z = 4$.

Ecrire les équations de la perpendiculaire commune à D_1 et D_2. Calculer $d(D_1, D_2)$.

Références

[1] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 4. Géométrie/cinématique*, Belin, Collection DIA, 1986.