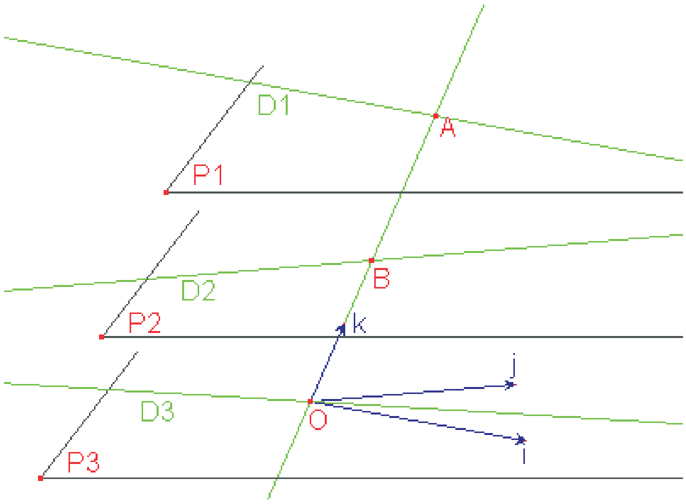
Géométrie affine

Denis Vekemans *

Exercice 8 $P_1//P_2//P_3$, $D_1 \subset P_1$, $D_2 \subset P_2$, $D_3 \subset P_3$.



Soit O un point de D_3. $\vec{i}$ dirige D_1, $\vec{j}$ dirige D_2, et si Π_1 est le plan contenant O et D_1 et si Π_2 est le plan contenant O et D_2, $\vec{k}$ dirige $\delta = \Pi_1 \bigcap \Pi_2$.

On se place dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. $O(0,0,0)$; $A(0,0,a)$; $B(0,0,b)$. D_1 a pour équations $y = 0$ et $z = a$. D_2 a pour équations $x = 0$ et $z = b$. D_3 a pour équations $y = mx$ et $z = 0$.

Les équations d'une droite Δ rencontrant D_1 et D_2 sont $y + \lambda(z - a) = 0$ (faisceau de plans contenant D_1) et $x + \mu(z - b) = 0$ (faisceau de plans contenant D_2).

Pour que cette droite Δ rencontre D_3, il faut et il suffit que $mx + \lambda(-a) = 0$ et $x + \mu(-b) = 0$ (on a réinjecté $y = mx$ et $z = 0$), ce qui équivaut à $x = \mu b$ et $m\mu b = \lambda a$ (ce qui donne une relation entre λ et μ).

On déduit les équations de δ : $y + \lambda(z - a) = 0$ et $x + \frac{\lambda a}{mb}(z - b) = 0$. Et, cette droite δ est dirigée par $\vec{u}(\lambda a, \lambda mb, -mb) \in \vec{\mathcal{P}}$ où $\vec{\mathcal{P}}$ a pour équation $mbx - ay = 0$.

Ainsi, les droites qui rencontrent D_1, D_2 et D_3 restent parallèles à un plan fixe (qui est $\vec{\mathcal{P}}$).

Exercice 9 Soient $\overrightarrow{P}$ la direction de P, $\overrightarrow{D}$ la direction de D, et $\overrightarrow{\Delta}$ la direction de Δ.

[1] Tout d'abord, étudions ρ, la partie linéaire de h.

Nous avons idée que ρ, qui est en quelque sorte une moyenne arithmétique entre deux projecteurs, est également un projecteur.

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Soient p la projection vectorielle associée à f et q la projection vectorielle associée à g. Nous avons, par conséquent, $\rho = \lambda p + \mu q$.

Pour montrer que ρ est un projecteur, il nous suffit de montrer que

$$\rho \circ \rho = \rho$$

ou que

$$(\lambda p + \mu q) \circ (\lambda p + \mu q) = \lambda p + \mu q$$

ou encore que

$$\lambda^2 \underbrace{p \circ p}_{=p} + \lambda\mu p \circ q + \lambda\mu q \circ p + \mu^2 \underbrace{q \circ q}_{=q} = \lambda p + \mu q.$$

Pour poursuivre, il nous faut étudier $p \circ q$ et $q \circ p$. Soient $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ des vecteurs de base de $\overrightarrow{P}$ et soit $\overrightarrow{k}$ un vecteur de base de $\overrightarrow{D}$. Nous avons $p(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{0}$; $p(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{0}$; $p(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{k}$; $q(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{0}$; $q(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{0}$; $q(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{k} + \overrightarrow{z}$, ce qui définit $\overrightarrow{z} \in \overrightarrow{P}$. Puis, $p \circ q(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{0}$; $p \circ q(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{0}$; $p \circ q(\overrightarrow{k}) = p(\overrightarrow{k}) + p(\overrightarrow{z}) = p(\overrightarrow{k})$; $q \circ p(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{0}$; $q \circ p(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{0}$; $q \circ p(\overrightarrow{k}) = q(\overrightarrow{k})$; ce qui induit que $p \circ q = p$ et que $q \circ p = q$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\lambda^2 \underbrace{p \circ p}_{=p} + \lambda\mu \underbrace{p \circ q}_{=p} + \lambda\mu \underbrace{q \circ p}_{=q} + \mu^2 \underbrace{q \circ q}_{=q} &= \lambda^2 p + \lambda\mu(p+q) + \mu^2 q \\
&= \underbrace{(\lambda + \mu)}_{=1}(\lambda p + \mu q) \\
&= \lambda p + \mu q
\end{aligned}$$

Maintenant que nous savons que ρ est un projecteur, nous cherchons *selon quoi* et *sur quoi*.

Le noyau ? $\overrightarrow{P} \subset Ker(\rho)$.

L'image ? $Im(\rho)$. Soit $\overrightarrow{x}$ dans $Im(\rho)$ avec $\overrightarrow{x} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$. Mais,

$$\begin{aligned}
\rho(\overrightarrow{x}) &= (\lambda p + \mu q)(a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}) \\
&= a\underbrace{(\lambda p + \mu q)(a\overrightarrow{i})}_{=\overrightarrow{0}} + b\underbrace{(\lambda p + \mu q)(\overrightarrow{j})}_{=\overrightarrow{0}} + c(\lambda p + \mu q)(\overrightarrow{k}) \\
&= c(\lambda p(\overrightarrow{k}) + \mu q(\overrightarrow{k})) \\
&= c[\lambda\overrightarrow{k} + \mu(\overrightarrow{k} + \overrightarrow{z})] \\
&= c[\underbrace{(\lambda + \mu)}_{=1}\overrightarrow{k} + \mu\overrightarrow{z}] \\
&= c(\overrightarrow{k} + \mu\overrightarrow{z})
\end{aligned}$$

Soit $\overrightarrow{\delta} = \overrightarrow{k} + \mu\overrightarrow{z}$ la direction de δ, nous obtenons donc $\overrightarrow{\delta} \subset Im(\rho)$.

En conclusion, ρ est la projection vectorielle sur $\overrightarrow{\delta}$ parallèlement à $\overrightarrow{P}$.

[2] Etudions maintenant h qui est une projection affine sur une droite δ (dont nous connaissons la direction), parallèlement à P.

Il nous reste à trouver un point de δ.

Soit A le point de concours de P et de D (il est unique parce que sinon, nous ne pouvons définir f) et soit B le point de concours de P et de Δ (il est unique parce que sinon, nous ne pouvons définir g). Soit enfin $C = bar((A,\lambda),(B,\mu))$. Nous avons $f(C) = A$; $g(C) = B$; et $h(C) = C$, ce qui induit que $C \in \delta$.

Exercice 14 Soit Φ_1 l'apllication linéaire associée à f_1 ; soit Φ_2 l'apllication linéaire associée à f_2 ; soit Φ_3 l'apllication linéaire associée à f_3 et soit Ψ l'apllication linéaire associée à h.

$\Phi_1 = \Psi$, d'où f_1 est une homothétie affine de rapport k ; $\Phi_1 = Id$, d'où f_2 est une translation affine de rapport k ; $\Phi_3 = \Psi$, d'où f_3 est une homothétie affine de rapport k.

Recherche du centre de f_1 : Ω.

$\Omega = t \circ \underbrace{h \circ \underbrace{t(\Omega)}_{:=\Omega_1}}_{:=\Omega_2}$.

On a $\underbrace{\overrightarrow{\Omega\Omega_1}}_{=\overrightarrow{O\Omega_1}-\overrightarrow{O\Omega}} = \vec{u}$; $\overrightarrow{O\Omega_2} = k\overrightarrow{O\Omega_1}$; et $\underbrace{\overrightarrow{\Omega_2\Omega}}_{=\overrightarrow{O\Omega}-\overrightarrow{O\Omega_2}} = \vec{u}$.

D'où (système à trois équations, et à trois inconnues), $\overrightarrow{O\Omega} = \vec{u}\frac{1+k}{1-k}$.

Recherche du centre de f_2 : $\vec{\omega}$.

$\vec{\omega} = \overrightarrow{O\,\underbrace{h^{-1} \circ \underbrace{t \circ \underbrace{h(O)}_{=0}}_{=0+\vec{u}}}_{=0+\frac{1}{k}\vec{u}}} = \frac{1}{k}\vec{u}$.

Recherche du centre de f_3 : Ω'.

$\Omega' = t \circ \underbrace{h \circ \underbrace{t^{-1}(\Omega')}_{:=\Omega_3}}_{:=\Omega_4}$.

On a $\underbrace{\overrightarrow{\Omega'\Omega_3}}_{=\overrightarrow{O\Omega_3}-\overrightarrow{O\Omega'}} = -\vec{u}$; $\overrightarrow{O\Omega_4 2} = k\overrightarrow{O\Omega_3}$; et $\underbrace{\overrightarrow{\Omega_4\Omega'}}_{=\overrightarrow{O\Omega'}-\overrightarrow{O\Omega_4}} = \vec{u}$.

D'où (système à trois équations, et à trois inconnues), $\overrightarrow{O\Omega'} = \vec{u}$.

Exercice 15 $(\vec{u}(1,-1,0), \vec{v}(1,0,-1))$ est une base de $\vec{\mathcal{P}}$; $(\vec{w}(1,1,1))$ est une base de $\vec{D}$.

Soit σ l'application linéaire associée à s, de matrice M.

De $\sigma(\vec{u}) = \vec{u}$, $\sigma(\vec{v}) = \vec{v}$ et $\sigma(\vec{w}) = -\vec{w}$, on déduit

$$M \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Or

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$M=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}.$$

Ainsi, $s:(x,y,z)\mapsto(x',y',z')$ tels que

$$\begin{cases}x'=\frac{1}{3}(x-2y-2z)+x_0\\ y'=\frac{1}{3}(-2x+y-2z)+y_0\\ z'=\frac{1}{3}(-2x-2y+z)+z_0\end{cases}.$$

Or $s\underbrace{(-1,0,0)}_{\in\mathcal{P}}=(-1,0,0)$, donc $x_0=y_0=z_0=-\frac{2}{3}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 16}}$ Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+2y+3z-1=0$.

Soit d la droite d'équations $x=y=0$.

$(\vec{u}(-3,0,1)),\vec{v}(0,-3,2)$ est une base de $\vec{\mathcal{P}}$; $(\vec{w}(1,2,3))$ est une base de $\vec{\mathcal{P}^{\perp}}$.

$(\vec{k}(0,0,1))$ est une base de $\vec{d}$.

Or, $\vec{w}(1,2,3)+\frac{1}{3}\vec{u}(-3,0,1)+\frac{2}{3}\vec{v}(0,-3,2)=\frac{14}{3}\vec{k}(0,0,1)$.

Soit s la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$; soit σ l'application linéaire associée à s, de matrice M.

De $\sigma(\vec{u})=\vec{u}$, $\sigma(\vec{v})=\vec{v}$ et $\sigma(\vec{w})=-\vec{w}$. Donc,

$$\begin{aligned}&\sigma(\frac{14}{3}\vec{k}(0,0,1))\\ =\ &\sigma(\vec{w}(1,2,3)+\frac{1}{3}\vec{u}(-3,0,1)+\frac{2}{3}\vec{v}(0,-3,2))\\ =\ &\sigma(\vec{w}(1,2,3))+\frac{1}{3}\sigma(\vec{u}(-3,0,1))+\frac{2}{3}\sigma(\vec{v}(0,-3,2))\\ =\ &-\vec{w}(1,2,3)+\frac{1}{3}\vec{u}(-3,0,1)+\frac{2}{3}\vec{v}(0,-3,2)\\ =\ &(-2,-4,-\frac{4}{3})\end{aligned}$$

Donc, $s(d)$ est dirigée par $\vec{\omega}(3,6,2)$.

Or $A(0,0,-\frac{1}{3})=\mathcal{P}\bigcap d$ est invariant par s.

On peut donc donner une paramétrisation de $s(d)$ par $A(0,0,-\frac{1}{3})+\lambda\vec{\omega}(3,6,2)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 21}}$ Solution en MATHEMATICA.

M_1 est choisi sans restriction sur l'axe (Oz).

$M_1=\{0,0,k\}$;

$A=\{x_A,y_A,z_A\}$ (*A un point de D_2*) ;

$B=\{x_B,y_B,z_B\}$ (*B un point de D_3*) ;

$u=\{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\}$ (*u un vecteur directeur de $D_2=A+\lambda u$*) ;

$v=\{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2\}$ (*v un vecteur directeur de $D_3=B+\mu v$*) ;

$\lambda=(u.(M_1-A))/(u.u)$; $M_2=Simplify[A+\lambda u]$ (*λ calculé pour que M_2 soit le projeté orthogonal de M_1 sur D_2*) ;

$\mu = (v.(M_2 - B))/(v.v)$; $M_3 = Simplify[B + \mu v]$ (*μ calculé pour que M_3 soit le projeté orthogonal de M_2 sur D_3*) ;

$w = \{0, 0, 1\}$ (*w un vecteur directeur de $D_1 = \nu w$*) ;

$\nu = (w.(M_3))/(w.w)$; $M_4 = Simplify[\nu w]$ (*ν calculé pour que M_4 soit le projeté orthogonal de M_3 sur D_1*) ;

$Solve[M_1 == M_4, k]$ (*trouver k tel que $M_1 = M_4$*)

Résultat :

$$
\begin{aligned}
k = \quad & [(\\
& \quad \alpha_2\beta_1^2\gamma_2\ x_A - \alpha_1\beta_1\beta_2\gamma_2\ x_A + \alpha_2\gamma_1^2\gamma_2\ x_A - \alpha_1\gamma_1\gamma_2^2\ x_A \\
& \quad -\alpha_1^2\alpha_2\gamma_2\ x_B - \alpha_2\beta_1^2\gamma_2\ x_B - \alpha_2\gamma_1^2\gamma_2\ x_B \\
& \quad -\alpha_1\alpha_2\beta_1\gamma_2\ y_A + \alpha_1^2\beta_2\gamma_2\ y_A + \beta_2\gamma_1^2\gamma_2\ y_A - \beta_1\gamma_1\gamma_2^2\ y_A \\
& \quad -\alpha_1^2\beta_2\gamma_2\ y_B - \beta_1^2\beta_2\gamma_2\ y_B - \beta_2\gamma_1^2\gamma_2\ y_B \\
& \quad -\alpha_1\alpha_2\gamma_1\gamma_2\ z_A - \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2\ z_A + \alpha_1^2\gamma_2^2\ z_A + \beta_1^2\gamma_2^2\ z_A \\
& \quad +\alpha_1^2\alpha_2^2\ z_B + \alpha_2^2\beta_1^2\ z_B + \alpha_1^2\beta_2^2\ z_B + \beta_1^2\beta_2^2\ z_B + \alpha_2^2\gamma_1^2\ z_B + \beta_2^2\gamma_1^2\ z_B \\
&)/(\\
& \quad \alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\gamma_1^2 + \beta_2^2\gamma_1^2 - \alpha_1\alpha_2\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 + \alpha_1^2\gamma_2^2 + \beta_1^2\gamma_2^2 \\
&)]
\end{aligned}
$$

Cette variante donne explicitement la valeur de k qui est bien définie car $\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\gamma_1^2 + \beta_2^2\gamma_1^2 - \alpha_1\alpha_2\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 + \alpha_1^2\gamma_2^2 + \beta_1^2\gamma_2^2 \neq 0$.

Variante plus simple de correction …

Soient p_1 la projection vectorielle sur $\overrightarrow{D_2}$, p_2 la projection vectorielle sur $\overrightarrow{D_3}$ et p_3 la projection vectorielle sur $\overrightarrow{D_1}$. Soit ρ l'application vectorielle qui à $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{D_1}$ fait correspondre $\rho(\overrightarrow{x}) = p_3 \circ p_2 \circ p_1(\overrightarrow{x})$.

ρ est linéaire, c'est donc une homothétie vectorielle (et donc une homothétie ou une translation affine).

Soient $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur de $\overrightarrow{D_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ un vecteur de $\overrightarrow{D_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ un vecteur de $\overrightarrow{D_3}$. Soient $\theta_1 = \widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}}$; $\theta_2 = \widehat{\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}}$ et $\theta_3 = \widehat{\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_1}}$. On a alors

$$\rho(\overrightarrow{x}) = \cos(\theta_3)\cos(\theta_2)\cos(\theta_1)\overrightarrow{x}.$$

Or, deux au moins des droites ne sont pas parallèles, donc $\cos(\theta_3)\cos(\theta_2)\cos(\theta_1) < 1$ et ρ n'est pas l'identité. Remarque : si deux des droites sont orthogonales, ρ est l'application nulle.

Ainsi, ρ est une homothétie vectorielle de rapport $\cos(\theta_3)\cos(\theta_2)\cos(\theta_1) < 1$. Soient π_1 la projection vectorielle sur D_2, π_2 la projection vectorielle sur D_3 et π_3 la projection vectorielle sur D_1. L'application affine $\pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1 = f$ est donc une homothétie affine de rapport $\cos(\theta_3)\cos(\theta_2)\cos(\theta_1) < 1$ et admet donc un unique point fixe.

Exercice 31

- $\vec{a} \bigwedge \vec{x} = \vec{c}$ (1).

  Lorsque $\vec{a} \neq \vec{0}$ et $\vec{a}\vec{c} = 0$, (1) admet des solutions.

Soit $\vec{x_0} = \lambda(\vec{a} \bigwedge \vec{c})$ une solution particulière de (1).

$$\begin{aligned}
\vec{a} \bigwedge \vec{x_0} = \vec{c} &\iff \vec{a} \bigwedge \lambda(\vec{a} \bigwedge \vec{c}) = \vec{c} \\
&\iff \lambda\vec{a} \bigwedge (\vec{a} \bigwedge \vec{c}) = \vec{c} \\
&\iff \lambda[(\underbrace{\vec{a}\vec{c}}_{=0})\vec{a} - (\vec{a}\vec{a})\vec{c}] = \vec{c} \\
&\iff -\lambda||\vec{a}||^2\vec{c} = \vec{c} \\
&\iff \lambda = \frac{-1}{||\vec{a}||^2}
\end{aligned}$$

Toute solution $\vec{x}$ de (1) vérifie donc $\vec{a} \bigwedge \vec{x} - \vec{a} \bigwedge \vec{x_0} = \vec{0}$, ce qui équivaut à $\vec{a} \bigwedge (\vec{x} - \vec{x_0}) = \vec{0}$ ou encore $\vec{x} - \vec{x_0} = k\vec{a}$ où $k \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des solutions de (1) s'écrit donc $\vec{x} = \frac{-1}{||\vec{a}||^2}(\vec{a} \bigwedge \vec{c}) + k\vec{a}$ (avec $k \in \mathbb{R}$).

- $\vec{b} \bigwedge \vec{x} = \vec{d}$ (2).

  L'ensemble des solutions de (2) s'écrit donc $\vec{x} = \frac{-1}{||\vec{b}||^2}(\vec{b} \bigwedge \vec{d}) + k'\vec{b}$ (avec $k' \in \mathbb{R}$).
- Ainsi, $\vec{x} = \frac{-1}{||\vec{a}||^2}(\vec{a} \bigwedge \vec{c}) + k\vec{a} = \frac{-1}{||\vec{b}||^2}(\vec{b} \bigwedge \vec{d}) + k'\vec{b}$ ou encore $k\vec{a} - k'\vec{b} = \frac{1}{||\vec{b}||^2}(\vec{d} \bigwedge \vec{b}) - \frac{1}{||\vec{a}||^2}(\vec{c} \bigwedge \vec{a}) = \vec{w}$.

  Donc, il faut et il suffit que $\vec{w}$ appartienne au plan vectoriel engendré par $(\vec{a}, \vec{b})$ ou encore que le produit mixte $(\vec{w}, \vec{a}, \vec{b}) = \vec{w}(\vec{a} \bigwedge \vec{b}) = 0$. Ceci équivaut à

$$\frac{1}{||\vec{a}||^2}(\vec{c} \bigwedge \vec{a})(\vec{a} \bigwedge \vec{b}) = \frac{1}{||\vec{b}||^2}(\vec{d} \bigwedge \vec{b})(\vec{a} \bigwedge \vec{b}).$$

  Or

$$\begin{aligned}
(\vec{c} \bigwedge \vec{a})(\vec{a} \bigwedge \vec{b}) &= (\vec{c} \bigwedge \vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) \\
&= ((\vec{c} \bigwedge \vec{a}) \bigwedge \vec{a})\vec{b} \\
&= ((\underbrace{\vec{a}\vec{c}}_{=0})\vec{a} - (\vec{a}\vec{a})\vec{c})\vec{b} \\
&= -||\vec{a}||^2(\vec{b}\vec{c}).
\end{aligned}$$

  Et, de même,

$$(\vec{d} \bigwedge \vec{b})(\vec{a} \bigwedge \vec{b}) = +||\vec{b}||^2(\vec{a}\vec{d}).$$

  On obtient donc $\vec{a}\vec{d} + \vec{b}\vec{c} = 0$, qui est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution.
- Il reste à déterminer k et k'.

  On a d'une part,

$$\vec{w} \bigwedge \vec{b} = \underbrace{\frac{1}{||\vec{b}||^2} \underbrace{(\vec{d} \bigwedge \vec{b}) \bigwedge \vec{b}}_{=(\underbrace{\vec{b}\vec{d}}_{=0})\vec{b} - (\vec{b}\vec{b})\vec{d}}}_{=-\vec{d}} - \frac{1}{||\vec{a}||^2} \underbrace{(\vec{c} \bigwedge \vec{a}) \bigwedge \vec{b}}_{=(\vec{b}\vec{c})\vec{a} - (\vec{b}\vec{a})\vec{c}}.$$

  Et, d'autre part,

$$\vec{w} \bigwedge \vec{b} = k\vec{a} \bigwedge \vec{b} - k' \underbrace{\vec{b} \bigwedge \vec{b}}_{=\vec{0}},$$

ce qui détermine k.

On a d'une part,

$$\vec{w} \bigwedge \vec{a} = \frac{1}{||\vec{b}||^2} \underbrace{(\vec{d} \bigwedge \vec{b}) \bigwedge \vec{a}}_{=(\vec{a}\vec{d})\vec{b}-(\vec{a}\vec{b})\vec{d}} - \underbrace{\frac{1}{||\vec{a}||^2} \ \underbrace{(\vec{c} \bigwedge \vec{a}) \bigwedge \vec{a}}_{=(\underbrace{\vec{a}\vec{c}}_{=0})\vec{a}-(\vec{a}\vec{a})\vec{c}}}_{=-\vec{c}} .$$

Et, d'autre part,

$$\vec{w} \bigwedge \vec{a} = k \underbrace{\vec{a} \bigwedge \vec{a}}_{=\vec{0}} - k'\vec{b} \bigwedge \vec{a},$$

ce qui détermine k'.

Références

[1] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 4. Géométrie/cinématique*, Belin, Collection DIA, 1986.