L'interpolation polynomiale

Denis Vekemans *

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On connaît $f(x_i)$ pour $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ et on veut trouver un polynôme P tel que $p(x_i) = f(x_i)$ pour $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Le tel polynôme P s'appelle polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses x_0, x_1, ..., x_n. On dit aussi que P interpole f en les points d'abscisses x_0, x_1, ..., x_n.

Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Théorème 1
Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un et un seul $P \in \mathcal{P}_n$ qui interpole f est que les abscisses d'interpolation x_i soient toutes distinctes.

Première démonstration

On cherche le polynôme P sous la forme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

On obtient le système à $n+1$ équations et $n+1$ inconnues ...

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_j^i = f(x_j),\ \forall j \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Ce système admet une solution unique si le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

est non nul. C'est équivalent à dire que les abscisses d'interpolation x_i sont toutes distinctes.

■

Deuxième démonstration

$\boxed{\text{Unicité}}$

On suppose qu'il existe deux polyomes $P \in \mathcal{P}_n$ et $Q \in \mathcal{P}_n$ qui interpolent f en les points d'abscisses x_0, x_1, ..., x_n. On définit alors $R = P - Q$. On obtient alors que R est un polynôme de $\mathcal{P}_n$ qui interpole la fonction nulle en les points d'abscisses x_0, x_1, ..., x_n. Il vient donc que $R = 0$, puis que $P = Q$.

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

$\boxed{\text{Existence}}$

Pour montrer son existence, on le construit.

On a

$$\begin{cases} -P(x) + a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0 \\ -f(x_0) + a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = 0 \\ -f(x_1) + a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = 0 \\ \ldots \\ -f(x_n) + a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n = 0 \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{vmatrix} -P(x) & 1 & x & \ldots & x^n \\ -f(x_0) & 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ -f(x_1) & 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -f(x_n) & 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = 0.$$

Ou encore,

$$\begin{vmatrix} -P(x) & 1 & x & \ldots & x^n \\ 0 & 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 0 & 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & \ldots & x^n \\ -f(x_0) & 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ -f(x_1) & 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -f(x_n) & 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Et il s'ensuit qu'on peut exprimer P sous forme d'un rapport de deux détermnants

$$P(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & \ldots & x^n \\ -f(x_0) & 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ -f(x_1) & 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -f(x_n) & 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}}.$$

■

Le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Le polynôme d'interpolation de Lagrange est donné par la formule de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i^{(n)}(x) f(x_i)$$

où

$$L_i^{(n)}(x) = \prod_{j=0 \text{ et } j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Ce polynôme de $\mathcal{P}_n$ interpole bien f en les points d'abscisses x_0, x_1, …, x_n et est donc bien le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses x_0, x_1, …, x_n, d'après le théorème 1.

Une autre formulation du polynôme de Lagrange ...

On pose

$$v_n(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

On calcule $v_n'(x_i)$ ...

$$v_n'(x_i) = \lim_{x\to x_i} \frac{v_n(x) - v_n(x_i)}{x - x_i} = \lim_{x\to x_i} \frac{v_n(x)}{x - x_i} = \prod_{j=0 \text{ et } j\neq i}^{n} (x_i - x_j).$$

Par conséquent,

$$P_n(x) = v_n(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x - x_i)v_n'(x_i)}.$$

Et,

$$L_i^{(n)}(x) = \frac{v_n(x)}{(x - x_i)v_n'(x_i)}.$$

<u>Le schéma de Neville-Aitken.</u>

On peut calculer récursivement les polynômes de Lagrange à l'aide du schéma de Neville Aitken comme suit ...

On nomme $T_k^{(i)}$ le polynôme qui interpole f en les points d'abscisses x_i, x_{i+1}, …, x_{i+k}.

Alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0^{(i)}(x) = f(x_i) \\ T_{k+1}^{(i)}(x) = \frac{(x_{i+k+1}-x)T_k^{(i)}(x) - (x_i - x)T_k^{(i+1)}(x)}{x_{i+k+1} - x_i} \text{ pour } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \text{ et } i \in \{0, 1, \ldots, n-k-1\} \end{array} \right. .$$

Algorithme triangulaire pour les générer.

<u>Démonstration</u>

On montre ce résultat par récurrence sur k.

- $T_0^{(i)}$ est bien le polynôme de $\mathcal{P}_0$ qui interpole f en x_i.
- On suppose que $T_k^{(i)}$ soit le polynôme de $\mathcal{P}_k$ qui interpole f en les points d'abscisses x_i, x_{i+1}, …, x_{i+k} et que $T_k^{(i+1)}$ soit le polynôme de $\mathcal{P}_k$ qui interpole f en les points d'abscisses x_{i+1}, x_{i+2}, …, x_{i+k+1} et on montre que $T_{k+1}^{(i)}$ est le polynôme de $\mathcal{P}_{k+1}$ qui interpole f en les points d'abscisses x_i, x_{i+1}, …, x_{i+k+1}.

  Il est évident que $T_{k+1}^{(i)} \in \mathcal{P}_{k+1}$.

  Ensuite,

– pour $x = x_i$, on a

$$T_{k+1}^{(i)}(x_i) = \frac{(x_{i+k+1} - x_i)\overbrace{T_k^{(i)}(x_i)}^{=f(x_i)} - \overbrace{(x_i - x_i)}^{=0}T_k^{(i+1)}(x_i)}{x_{i+k+1} - x_i} = f(x_i).$$

– pour $x = x_l$, avec $l \in \{i+1, i+2, \ldots, i+k\}$, on a

$$T_{k+1}^{(i)}(x_l) = \frac{(x_{i+k+1} - x_l)\overbrace{T_k^{(i)}(x_l)}^{=f(x_l)} - (x_i - x_l)\overbrace{T_k^{(i+1)}(x_l)}^{=f(x_l)}}{x_{i+k+1} - x_i} = f(x_l).$$

– pour $x = x_{i+k+1}$, on a

$$T_{k+1}^{(i)}(x_{i+k+1}) = \frac{\overbrace{(x_{i+k+1} - x_{i+k+1})}^{=0}T_k^{(i)}(x_i) - (x_i - x_{i+k+1})\overbrace{T_k^{(i+1)}(x_i)}^{=f(x_{i+k+1})}}{x_{i+k+1} - x_i} = f(x_{i+k+1}).$$

Ainsi, d'après le théorème 1, $T_{k+1}^{(i)}$ est le polynôme de $\mathcal{P}_{k+1}$ qui interpole f en les points d'abscisses x_i, x_{i+1}, …, x_{i+k+1}.

$T_n^{(0)}$ est donc le polynôme de $\mathcal{P}_n$ qui interpole f en les points d'abscisses x_0, x_1, …, x_n.

■

<u>Les différences divisées.</u>

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On connaît $f(x_i)$ pour $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ et on veut trouver un polynôme P tel que $p(x_i) = f(x_i)$ pour $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

On appelle différences divisées d'ordre 0, 1, …, n de la fonction f, les expressions suivantes

– Ordre 0 :

$$\lceil x_{i_0} \rfloor_f = f(x_{i_0}).$$

– Ordre 1 :

$$\lceil x_{i_0}, x_{i_1} \rfloor_f = \frac{\lceil x_{i_0} \rfloor_f - \lceil x_{i_1} \rfloor_f}{x_{i_0} - x_{i_1}}.$$

– Ordre k :

$$\lceil x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \rfloor_f = \frac{\lceil x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}} \rfloor_f - \lceil x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \rfloor_f}{x_{i_0} - x_{i_k}},$$

pour $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$.

Algorithme triangulaire pour les générer.

Théorème 2

$$\lceil x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \rfloor_f = \sum_{i \in \{i_0, i_1, \ldots, i_k\}} \frac{f(x_i)}{v'(x_i)},$$

où

$$v(x) = \prod_{i \in \{i_0, i_1, \ldots, i_k\}} (x - x_i).$$

<u>Démonstration</u>

On montre ce résultat par récurrence sur k.

– Pour $k = 0$, on a $v(x) = x - x_{i_0}$, $v'(x) = 1$ et $\lceil x_{i_0} \rfloor_f = f(x_{i_0})$.

– On suppose avoir démontré que

$$\lceil x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \rfloor_f = \sum_{i \in \{i_0, i_1, \ldots, i_k\}} \frac{f(x_i)}{v_1'(x_i)},$$

où

$$v_1(x) = \prod_{i \in \{i_0, i_1, \ldots, i_k\}} (x - x_i)$$

et que

$$\lceil x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k+1}} \rfloor_f = \sum_{i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}\}} \frac{f(x_i)}{v_2'(x_i)},$$

où

$$v_2(x) = \prod_{i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}\}} (x - x_i).$$

On va démontrer que

$$\lceil x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k+1}} \rfloor_f = \sum_{i \in \{i_0, i_1, \ldots, i_{k+1}\}} \frac{f(x_i)}{v_3'(x_i)},$$

où

$$v_3(x) = \prod_{i \in \{i_0, i_1, \ldots, i_{k+1}\}} (x - x_i).$$

$$\begin{aligned}
& \lceil x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k+1}} \rfloor_f \\
= \quad & \frac{\lceil x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \rfloor_f - \lceil x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k+1}} \rfloor_f}{x_{i_0} - x_{i_{k+1}}} \\
= \quad & \frac{1}{x_{i_0} - x_{i_{k+1}}} \left(\frac{f(x_{i_0})}{v_1'(x_{i_0})} + \left(\sum_{i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}} f(x_i) \left(\frac{1}{v_1'(x_i)} - \frac{1}{v_2'(x_i)} \right) \right) - \frac{f(x_{i_{k+1}})}{v_2'(x_{i_{k+1}})} \right) \\
= \quad & \sum_{i \in \{i_0, i_1, \ldots, i_{k+1}\}} \frac{f(x_i)}{v_3'(x_i)}
\end{aligned}$$

car

$$v_1'(x_{i_\nu}) = \prod_{i \in \{i_0, i_1, \ldots, i_k\} \setminus \{i_\nu\}} (x_{i_\nu} - x_i),$$

$$v_2'(x_{i_\nu}) = \prod_{i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}\} \setminus \{i_\nu\}} (x_{i_\nu} - x_i),$$

et

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{v_1'(x_{i_\nu})} - \frac{1}{v_2'(x_{i_\nu})} \\
= \quad & \frac{1}{\prod_{i\in\{i_0,i_1,\ldots,i_k\}\setminus\{i_\nu\}}(x_{i_\nu}-x_i)} - \frac{1}{v_2'(\prod_{i\in\{i_1,i_2,\ldots,i_{k+1}\}\setminus\{i_\nu\}}(x_{i_\nu}-x_i))} \\
= \quad & \frac{(x_{i_\nu}-x_{i_{k+1}})-(x_{i_\nu}-x_{i_0})}{\prod_{i\in\{i_0,i_1,\ldots,i_{k+1}\}\setminus\{i_\nu\}}(x_{i_\nu}-x_i)} \\
= \quad & \frac{x_{i_0}-x_{i_{k+1}}}{\prod_{i\in\{i_0,i_1,\ldots,i_{k+1}\}\setminus\{i_\nu\}}(x_{i_\nu}-x_i)} \\
= \quad & \frac{x_{i_0}-x_{i_{k+1}}}{v_3'(x_{i_\nu})}
\end{aligned}$$

■

Théorème 3

$$\begin{aligned}
f(x) \quad = \quad & \lceil x_0 \rfloor_f \\
+ \quad & (x-x_0)\lceil x_0,x_1 \rfloor_f \\
+ \quad & \ldots \\
+ \quad & (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\lceil x_0,x_1,\ldots,x_n \rfloor_f \\
+ \quad & (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\lceil x,x_0,x_1,\ldots,x_n \rfloor_f .
\end{aligned}$$

<u>**Démonstration**</u>

On a $\lceil x \rfloor_f = f(x)$.

On a $\lceil x,x_0 \rfloor_f = \frac{\lceil x \rfloor_f - \lceil x_0 \rfloor_f}{x-x_0}$, puis $f(x) = \lceil x_0 \rfloor_f + (x-x_0)\lceil x,x_0 \rfloor_f$.

On a $\lceil x,x_0,x_1 \rfloor_f = \frac{\lceil x,x_0 \rfloor_f - \lceil x_0,x_1 \rfloor_f}{x-x_1}$, puis $f(x) = \lceil x_0 \rfloor_f + (x-x_0)\Big(\lceil x_0,x_1 \rfloor_f + (x-x_1)\lceil x,x_0,x_1 \rfloor_f\Big) = \lceil x_0 \rfloor_f + (x-x_0)\lceil x_0,x_1 \rfloor_f + (x-x_0)(x-x_1)\lceil x,x_0,x_1 \rfloor_f$.

Et ainsi de suite ...

■

Théorème 4

Le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses x_0, x_1, …, x_n s'écrit

$$\begin{aligned}
P_n(x) \quad = \quad & \lceil x_0 \rfloor_f \\
+ \quad & (x-x_0)\lceil x_0,x_1 \rfloor_f \\
+ \quad & \ldots \\
+ \quad & (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\lceil x_0,x_1,\ldots,x_n \rfloor_f .
\end{aligned}$$

<u>**Démonstration**</u>

D'après le théorème 2, on a

$$\lceil x,x_0,x_1,\ldots,x_n \rfloor_f = \frac{f(x)}{v_n(x)} + \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i-x)v_n'(x_i)},$$

où

$$v(x) = \prod_{i \in \{i_0, i_1, \ldots, i_k\}} (x - x_i),$$

avec $v_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$.

Or, on a vu

$$P_n(x) = v_n(x) \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x - x_i) v_n'(x_i)}$$

et, par conséquent,

$$v_n(x) \lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_n \rfloor_f = f(x) - P_n(x).$$

Puis, d'après le théorème 3,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \lceil x_0 \rfloor_f \\ &+ (x - x_0) \lceil x_0, x_1 \rfloor_f \\ &+ \ldots \\ &+ (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \lceil x_0, x_1, \ldots, x_n \rfloor_f . \end{aligned}$$

■

On définit $E_n = f - P_n$.

Théorème 5

$$E_n(x) = \underbrace{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)}_{= v_n(x)} \lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_n \rfloor_f .$$

Démonstration

Trivial.

■

Et, d'une manière plus exploitable, ... en posant $I = [\min(\min_i x_i, x), \max(\max_i x_i, x)]$.

Théorème 6

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, alors

$$E_n(x) = \frac{v_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta),$$

avec $\zeta \in I$.

Démonstration

On pose $F = f - P_n - c v_n$ où $c = \lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_n \rfloor_f$.

On a $F(x_i) = 0$ pour $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, et $F(x) = 0$, d'après le théorème 5. F possède donc au moins $n + 2$ racines dans I.

D'après le théorème de Rolle, F' possède donc au moins $n + 2$ racines dans I.

...

D'après le théorème de Rolle, $F^{(n+1)}$ possède donc au moins 1 racine dans I et on nomme ζ l'une de ces racines.

On a

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \underbrace{P_n^{(n+1)}(t)}_{=0} - c\,\underbrace{v_n^{(n+1)}(t)}_{=(n+1)!}.$$

Puis,

$$0 = F^{(n+1)}(\zeta) = f^{(n+1)}(\zeta) - c(n+1)!,$$

et

$$E_n(x) = \frac{v_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta).$$

■

Théorème 7
Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, alors

$$\lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_n \rfloor_f = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$$

avec $\zeta \in I$.

Démonstration

Trivial.

■

On cherche maintenant à minimiser l'erreur d'interpolation E_n sur $[a, b]$: on cherche

$$\min_{x_i \in [a,b]} \left(\max_{x \in [a,b]} |v_n(x)| \right).$$

La réponse à ce problème est donnée par les polynômes de Tchébychev T_n lorsque $a = -1$ et $b = 1$.

Remarque : lorsque l'intervalle est $[a, b]$, on se ramène à $[-1, 1]$ par le changement de variable affine $x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}$ où $x \in [a, b]$ et où $t \in [-1, 1]$.

On définit T_n par $T_n(x) = \cos(n\Theta)$, avec $\Theta = \arccos x$.

Théorème 8
Les fonctions T_n satisfont la relation de récurrence à trois termes

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$$

pour $n \geq 1$ avec $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$.

Démonstration

La formule trigonométrique

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

avec $p = (n+1)\Theta$ et $q = (n-1)\Theta$ fournit immédiatement le résultat.

■

Théorème 9
Les fonctions T_n sont des fonctions polynômes pour lesquelles le coefficient de x^n est 2^{n-1}.

Démonstration

Une récurrence simple depuis la formule de récurrence à trois termes induit que les fonctions T_n sont des fonctions polynômes pour lesquelles le coefficient de x^n est 2^{n-1}.

■

Théorème 10
Les n racines simples de T_n sont données par $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right)$, pour $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Démonstration

$T_n(x_i) = \cos\left(n\arccos(\cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right))\right) = \cos\left(n\frac{2i+1}{2n}\pi\right) = \cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi\right) = 0.$
T_n possède donc les n racines simples $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right)$, pour $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

■

Théorème 11
Les $n+1$ extrema de T_n sont données par $\widetilde{x}_i = \cos\left(\frac{i}{n}\pi\right)$, pour $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tels que $T_n(\widetilde{x}_i) = (-1)^i$.

Démonstration

$T_n'(x) = \sin\left(n\arccos(x)\right)\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}$.
Puis, $T_n'(\widetilde{x}_i) = \sin\left(n\arccos(\cos\left(\frac{i}{n}\pi\right))\right)\frac{n}{\sqrt{1-(\cos\left(\frac{i}{n}\pi\right))^2}} = \sin\left(i\pi\right)\frac{n}{\sqrt{1-(\cos\left(\frac{i}{n}\pi\right))^2}} = 0.$
$T_n(\widetilde{x}_i) = \cos\left(n\arccos(\cos\left(\frac{i}{n}\pi\right))\right) = \cos\left(n\frac{i}{n}\pi\right) = \cos\left(i\pi\right) = (-1)^i.$

■

On revient maintenant au problème où on cherche

$$\min_{x_i\in[-1,1]}\left(\max_{x\in[-1,1]}|v_n(x)|\right).$$

On appelle $\mathcal{Q}_{n+1}$ l'ensemble des polynômes de degré $n+1$ tels que
– le coefficient de x^{n+1} soit égal à 1 ;
– toutes les racines soient distinctes et appartiennent à $[-1, 1]$.
Notre problème peut donc se reformuler ainsi : on cherche le polynôme v_n de $\mathcal{Q}_{n+1}$ tel que

$$\max_{x\in[-1,1]}|v_n(x)| \leq \max_{x\in[-1,1]}|p(x)|,\ \forall p \in \mathcal{Q}_{n+1}.$$

Théorème 12
$\forall p \in \mathcal{Q}_{n+1}$, on a

$$\frac{1}{2^n} = \max_{x\in[-1,1]}\frac{|T_{n+1}(x)|}{2^n} \leq \max_{x\in[-1,1]}|p(x)|.$$

Démonstration

On a $\frac{T_{n+1}}{2^n} \in \mathcal{Q}_{n+1}$, d'après les théorèmes 9 et 10.

$\frac{|T_{n+1}|}{2^n}$ prend $n+2$ fois sa valeur maximale sur $[-1,1]$ (aux points $\widetilde{x}_i = \cos\left(\frac{i}{n+1}\pi\right)$, pour $i \in \{0,1,\ldots,n+1\}$ et cette valeur maximale est $\frac{1}{2^n}$, d'après le théorème 11.

Supposons qu'il existe $p \in \mathcal{Q}_{n+1}$ tel que

$$\max_{x\in[-1,1]} |p(x)| < \frac{1}{2^n}.$$

Le polynôme $r = \frac{T_{n+1}}{2^n} - p$ est tel que $r \in \mathcal{P}_n$.

De plus, on a $r(\widetilde{x}_i) = \frac{(-1)^i}{2^n} - p(\widetilde{x}_i)$, pour $i \in \{0,1,\ldots,n+1\}$ et $r(\widetilde{x}_i)$ est alternativement positive et négative car $p(\widetilde{x}_i) < \frac{1}{2^n}$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, r a donc au moins $n+1$ racines distinctes. Or, $r \in \mathcal{P}_n$, donc $r = 0$.

■

On peut reformuler le théorème précédent ...

Théorème 13

Le choix des abscisses d'interpolation x_i qui minimise le maximum de $E_n(x)$ pour $x \in [-1,1]$ est donné par

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right),\ \forall i \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Convergence de la méthode d'interpolation polynômiale.

Le théorème de Weierstrass assure la convergence du polynôme d'interpolation P_n de f en les points d'abscisses $x_i^{(n)} = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$, $\forall i \in \{0,1,\ldots,n\}$ vers la fonction f lorsque f est continue.

Par contre, le polynôme d'interpolation P_n de f en les points d'abscisses $x_i^{(n)} = -1+\frac{2i}{n}$, $\forall i \in \{0,1,\ldots,n\}$ ne converge pas forcément vers la fonction f, même lorsque f est continue. [Ce résultat n'est pas démontré ici].

Voici le théorème de Weierstrass sous forme d'un exercice (voir [2]) portant sur les suites et séries de fonctions.

Exercice : **Théorème de Weierstrass**. f est supposée continue sur $[0,1]$. On pose $E_k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$.

1. Calculer $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} E_k(x)}_{=1}$, $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} kE_k(x)}_{=nx}$, $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k^2 E_k(x)}_{=n(n-1)x^2+nx}$ et $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 E_k(x)}_{=nx(1-x)}$.
2. $\alpha > 0$; $I_n = \{0,1,\ldots,n\}$. On définit, pour $x \in [0,1]$, $K_n = \left\{k \in \mathbb{N}, |\frac{k}{n} - x| \geq \alpha\right\}$ et $K'_n = I_n \backslash K_n$. Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $\sum_{k\in K_n} E_k(x) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, B_n : f \to B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) E_k$. Montrer que $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
4. Soit g continue sur $[0,1]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 g(x)x^n dx = 0$. Montrer que $g = 0$ sur $[0,1]$.

Corrigé de l'exercice : **Théorème de Weierstrass**.

1. (a) $\sum_{k=0}^{n} E_k(x) = 1$ (trivial par la formule du binôme de Newton).

   (b) $\sum_{k=0}^{n} kE_k(x) = nx$ (trivial en utilisant $C_n^k = \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$).

   (c) $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)E_k(x) = n(n-1)x^2$ (trivial en utilisant $C_n^k = \frac{n(n-1)}{k(k-1)}C_{n-2}^{k-2}$).

   (d) $\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2E_k(x) = nx(1-x)$ (en développant $(k-nx)^2$ par rapport à k dans la base des $\{1, k, k(k-1)\}$).

2.
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2E_k(x) = n\underbrace{x(1-x)}_{\leq\frac{1}{4}} &\geq \sum_{k\in K_n}(\underbrace{k-nx}_{\geq n\alpha})^2E_k(x)\\ &\geq n^2\alpha^2\sum_{k\in K_n}E_k(x).\end{aligned}$$

   D'où
$$\sum_{k\in K_n}E_k(x) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

3. f est continue sur $[0,1]$ donc uniformément continue sur $[0,1]$. Soit $M = \max_{x\in[0,1]}|f(x)|$.
$$\forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0 \text{ tel que } \forall a\in[0,1],\ \forall b\in[0,1], |a-b|<\alpha \Rightarrow |f(a)-f(b)|<\varepsilon.$$
$$f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k\in I_n}\left(f(x)-f(\frac{k}{n})\right)E_k(x).$$

   Puis,
$$|f(x)-B_n(f)(x)| \leq \underbrace{\sum_{k\in K_n}\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|E_k(x)}_{\leq 2M\frac{1}{4n\alpha^2}} + \underbrace{\sum_{k\in K_n'}\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|E_k(x)}_{<\varepsilon}.$$

   Donc,
$$\max_{x\in[0,1]}|f(x)-B_n(f)(x)| \leq M\frac{1}{2n\alpha^2}+\varepsilon.$$

   Puis,
$$B_n(f) \xrightarrow{u} f.$$

   Ceci finit la démonstration du théorème de Weierstrass : pour toute fonction continue f sur un segment, il existe une suite de fonctions polynômes qui converge uniformément vers f.

   C'est donc vrai également pour le polynôme d'interpolation de f sur $[-1,1]$ en les points d'abscisses $x_i^{(n)} = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$, $\forall i\in\{0,1,\ldots,n\}$.

4. Une application du théorème de Weierstrass.

   $\forall p\in\mathcal{P}_n,\ \int_0^1 g(x)p(x)dx$, par linéarité.

   De plus, d'après le théorème de Weierstrass, $\exists p_n\in\mathcal{P}_n$ tel que $p_n \xrightarrow{u} g$.

Donc,

$$\int_0^1 (g(x))^2 dx = \underbrace{\int_0^1 g(x)(g(x) - p_n(x))dx}_{\leq \varepsilon \max_{x\in[0,1]} |g(x)|} + \underbrace{\int_0^1 g(x)p_n(x)dx}_{=0}.$$

Puis,

$$\int_0^1 (g(x))^2 dx = 0,$$

et, comme g est continue, $g = 0$.

Références

[1] C. Brezinski, *Analyse Numérique Discrète*, Publications du Laboratoire de Calcul de l'Université des Sciences et Techniques de Lille.

[2] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 3. Analyse II*, Belin, Collection DIA, 1987.