Approximants de Padé

Denis Vekemans *

On considère la série formelle (f désigne la somme de cette série, si elle converge, ou son prolongement analytique ou encore la série elle-même)

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n.$$

Soit c une fonctionnelle linéaire (qui agit toujours sur la variable notée x) définie sur l'espace des polynômes par

$$c : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C} \text{ telle que } c(x^i) = c_i.$$

Ainsi, formellement, on a :

$$\frac{1}{1-xt} = \sum_{n \geq 0} x^n t^n, \text{ et } f(t) = c\left(\frac{1}{1-xt}\right).$$

On considère n points arbitraires distincts x_1, x_2,..., x_n, et on pose

$$v(x) = \prod_{1 \leq i \leq n} (x - x_i).$$

On obtient, avec les notations précédentes :

Théorème : Soit $R(x)$ le polynôme d'interpolation de $\frac{1}{1-xt}$ aux zéros de $v(x)$, à t fixé, soit

$$w(t) = c\left(\frac{v(x) - v(t)}{x - t}\right),$$

soit $\widetilde{v}(t) = t^n v(1/t)$ et soit $\widetilde{w}(t) = t^{n-1} v(1/t)$, alors

$$\left\{ \begin{array}{ccc} c(R(x)) & = & \frac{\widetilde{w}(t)}{\widetilde{v}(t)} \\ f(t) - c(R(x)) & = & \frac{t^n}{\widetilde{v}(t)} c\left(\frac{v(x)}{1-xt}\right) \end{array} \right. .$$

Démonstration :

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1-x_i t}\right) \frac{v(x)}{(x-x_i)v'(x_i)}. \text{ (base de Lagrange)}$$

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

$$\begin{aligned}
c(R(x)) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1-x_it}\right)c\left(\frac{v(x)}{(x-x_i)v'(x_i)}\right) \text{ (linéarité de } c)\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1-x_it}\right)\frac{1}{v'(x_i)}c\left(\frac{v(x)-v(x_i)}{(x-x_i)}\right) \text{ (linéarité de } c\,;\ v(x_i)=0)\\
&= \textstyle\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{t^{-1}-x_i}\right)\frac{w(x_i)}{v'(x_i)} \text{ (définition de } w(t))\\
&= \textstyle\frac{1}{t}\frac{w(t^{-1})}{v(t^{-1})} \text{ (décomposition en éléments simples)}\\
&= \textstyle\frac{\widetilde{w}(t)}{\widetilde{v}(t)} \text{ (définitions de } \widetilde{v}(t) \text{ et de } \widetilde{w}(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(t)-c(R(x)) &= \textstyle c\left(\frac{1}{1-xt}\right)-\frac{1}{t}\frac{w(t^{-1})}{v(t^{-1})} \text{ (définition de } f\,;\text{ expression de } c(R(x)))\\
&= \textstyle c\left(\frac{1}{1-xt}\right)-c\left(\frac{v(x)-v(t^{-1})}{tv(t^{-1})(x-t^{-1})}\right) \text{ (linéarité de } c\,;\text{ définition de } w(t))\\
&= \textstyle c\left(\frac{v(x)}{v(t^{-1})(1-xt)}\right) \text{ (linéarité de } c)\\
&= \textstyle\frac{t^n}{\widetilde{v}(t)}c\left(\frac{v(x)}{1-xt}\right) \text{ (définition de } \widetilde{v}(t))\\
&= O(t^n) \text{ pour } t \text{ voisin de } 0 \text{ (car } \widetilde{v}(0)=1).
\end{aligned}$$

1 Les approximants de type-Padé.

Soit Q un polynôme arbitraire de degré n, tel que $Q(0)\neq 0$. Soit P la somme partielle de degré $n-1$ de fQ, alors P/Q est appelé l'approximant de type-Padé $(n-1/n)_f$ avec Q comme dénominateur, de f. On a :

$$f(t)-\frac{P(t)}{Q(t)}=O(t^n) \text{ pour } t \text{ voisin de } 0.$$

Sous de telles conditions, P existe et est unique. Si on pose $\widetilde{Q}(t)=t^nQ(1/t)$ et $\widetilde{P}(t)=t^{n-1}P(1/t)$, le théorème précédent induit :

$$\widetilde{P}(t)=c\left(\frac{\widetilde{Q}(x)-\widetilde{Q}(t)}{x-t}\right)$$

2 Les approximants de Padé

Le théorème donne :

$$\begin{aligned}
f(t)-c(R(x)) &= \textstyle\frac{t^n}{\widetilde{v}(t)}c\left(\frac{v(x)}{1-xt}\right)\\
&= \textstyle\frac{t^n}{\widetilde{v}(t)}c\left(v(x)\sum_{k\geq 0}x^kt^k\right)\\
&= \textstyle\frac{1}{\widetilde{v}(t)}\sum_{k\geq 0}c\left(v(x)x^k\right)t^{n+k}
\end{aligned}$$

Ainsi, si $c(x^iv(x))=0$, $\forall i\in\{0,1,...,n-1\}$, $f(t)-c(R(x))=\frac{t^{2n}}{\widetilde{v}(t)}c\left(\frac{x^nv(x)}{1-xt}\right)=O(t^{2n})$ pour t voisin de 0. $c(R(x))$ est alors appelé l'approximant de Padé $[n-1/n]_f$.

La condition d'existence peut aussi s'écrire

$$\begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_{n-1} \\ & & \\ c_{n-1} & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Lorsque la condition d'existence est remplie, l'approximant de Padé est unique.

3 Généralisation

On cherche deux polynômes P (de degré p) et Q (de degré q) tels que $f(t) - \frac{P(t)}{Q(t)} = O(t^{p+q+1})$ pour t voisin de 0.

Soient $P(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_p t^p$ et $Q(t) = 1 + b_1 t + ... + b_q t^q$.

Il nous faut alors : $(1 + b_1 t + ... + b_q t^q) f(t) - a_0 + a_1 t + ... + a_p t^p = O(t^{p+q+1})$ pour t voisin de 0.

Ceci nous fournit le système suivant pour déterminer P et Q

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_1 + b_1 c_0 = a_1 \\ ... \\ c_p + b_1 c_{p-1} + ... + b_p c_0 = a_p \\ c_{p+1} + b_1 c_p + ... + b_{p+1} c_0 = 0 \\ c_{p+2} + b_1 c_{p+1} + ... + b_{p+2} c_0 = 0 \\ \\ c_{p+q} + b_1 c_{p+q-1} + ... + b_q c_p = 0 \end{cases}$$

et, avec la convention $c_i = 0$ si $i < 0$, la condition d'existence s'écrit :

$$\begin{vmatrix} c_p & \cdots & c_{p-q+1} \\ & & \\ c_{p+q-1} & \cdots & c_p \end{vmatrix} \neq 0.$$

Lorsque la condition d'existence est remplie, l'approximant de Padé est unique.

Dans le cas où $p = m + q$ $(m \geq -1)$,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n = \sum_{n=0}^{m} c_n z^n + \sum_{n \geq m+1} c_n z^n = \sum_{n=0}^{m} c_n z^n + z^{m+1} \underbrace{\sum_{n \geq 0} c_{m+1+n} z^n}_{:= f_m(z)}$$

et on a :

$$[m + q/q]_f(t) = \sum_{n=0}^{m} c_n z^n + z^{m+1} [q - 1/q]_{f_m}(t). \text{ (par unicité de l'approximant de Padé)}$$

De plus, on peut avoir l'expression de l'approximant de Padé sous forme d'un rapport de deux déterminants comme suit :

$$[p/q]_f(t) = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{p-q} c_i t^{q+i} & \sum_{i=0}^{p-q+1} c_i t^{q-1+i} & \dots & \sum_{i=0}^{p} c_i t^i \\ c_{p-q+1} & c_{p-q+2} & \cdots & c_{p+1} \\ & & & \\ c_p & c_{p+1} & \cdots & c_{p+q} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t^q & t^{q-1} & \dots & 1 \\ c_{p-q+1} & c_{p-q+2} & \cdots & c_{p+1} \\ & & & \\ c_p & c_{p+1} & \cdots & c_{p+q} \end{vmatrix}}.$$

Références

[1] C. Brezinski, *Padé-type Approximations and General Orthogonal Polynomials*, volume 50 of ISNM, Birkhaüser-Verlag, Basel, 1980.