

Courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes, en coordonnées polaires ou par une fonction implicite

Denis Vekemans *

Exercice 1 Construire la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = t + \frac{1}{2t^2} \\ y(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t} \end{cases}$$

Remarque : $x(\frac{1}{t}) = y(t)$ et $y(\frac{1}{t}) = x(t)$.

Exercice 2 Construire la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{t^2}{t-1} \end{cases}$$

Montrer que les tangentes sont orthogonales au point double.

Exercice 3 Construire la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \frac{(\cos(t))^2}{2-\cos(t)} \end{cases}$$

Montrer que les tangentes sont orthogonales au point double.

Exercice 4 Construire la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{2} - t \\ y(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

Soient M_1 et M_2 deux points de la courbe en lesquels les tangentes sont orthogonales et P le point d'intersection de ces deux tangentes. Déterminer et reconnaître l'ensemble décrit par P quand M_1 décrit la courbe.

Exercice 5 On considère la famille de courbes d'équations paramétriques Γ_m :

$$\begin{cases} x(t) = (\cos(t))^3 + m \sin(t) \\ y(t) = (\sin(t))^3 + m \cos(t) \end{cases}$$

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Pour quelles valeurs de m les courbes Γ_m admettent-elles des points stationnaires? Trouver des équations paramétriques de l'ensemble γ des points stationnaires et représenter graphiquement cet ensemble.

Exercice 6 Construire la courbe d'équations polaires

$$\rho(\theta) = 2 \cos(\theta) - \cos(2\theta).$$

Déterminer les tangentes au point double.

Exercice 7 Construire la courbe d'équations polaires

$$\rho(\theta) = 1 + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Déterminer l'asymptote et la position de la courbe par rapport à celle-ci. Déterminer les tangentes au point double.

Exercice 8 Construire l'ensemble Γ des points $M(x, y)$ tels que

$$x^2 e^y = y^2 e^x.$$

Exercice 9 Etudier la forme de la courbe Γ d'équation

$$x^3 - y^3 - 11x^2 - 3y^2 + 4xy + 23x - 7y - 14 = 0$$

au voisinage du point $P(1, -1)$.

Références

- [1] M. Messeri, *Exercices de mathématiques. 2. Analyse I*, Belin, Collection DIA, 1987.
- [2] D. Duverney, S. Heumez, G. Huvent, *Toutes les mathématiques. Cours. Exercices corrigés. MPSI, PCSI, PTSI, TSI.*, Ellipses, 2004.