Le problème de Cauchy

Denis Vekemans [*]

Dans cet exposé, $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit y une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, différentiable.

On appelle équation différentielle du premier ordre la relation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)).$$

On dit que y est solution de cette équation différentielle sur $[a, b]$ si y vérifie la relation précédente pour tout x de $[a, b]$.

Etant donné $y_0 \in \mathbb{R}$, on appelle problème de Cauchy le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}.$$

On note $\mathcal{C}([a, b])$ l'espace des fonctions définies et continues sur $[a, b]$.

Théorème 1

Si $f \in \mathcal{C}([a, b])$ et si f vérifie la condition (dite de Lipschitz)

$$\forall x \in [a, b],\ \forall y \in \mathcal{C}([a, b]),\ \forall z \in \mathcal{C}([a, b]),\ \exists L > 0 \text{ tel que } |f(x, y(x)) - f(x, z(x))| \leq L|y(x) - z(x)|,$$

alors, le problème de Cauchy admet une solution et une seule sur $[a, b]$ (et ceci pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$).

<u>**Démonstration**</u>

$\boxed{\text{Unicité}}$

Si le problème de Cauchy admet une solution y, cette solution vérifie

$$\forall x \in [a, b],\ y(x) = y_0 + \int_a^x f(t, y(t))dt.$$

Supposons qu'il existe deux solutions y et z à ce même problème de Cauchy.

De $\forall x \in [a, b],\ y(x) = y_0 + \int_a^x f(t, y(t))dt$ et $\forall x \in [a, b],\ z(x) = y_0 + \int_a^x f(t, z(t))dt$, nous obtenons facilement,

$$\forall x \in [a, b],\ y(x) - z(x) = \int_a^x f(t, y(t)) - f(t, z(t))dt.$$

Or, f vérifie une condition de Lipschitz, d'où

$$\forall x \in [a, b],\ |y(x) - z(x)| \leq L \int_a^x |y(t) - z(t)|dt \leq L||y - z||_\infty |x - a|,$$

[*]Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

où $||\omega||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |\omega(x)|$, pour $\omega \in \mathcal{C}([a,b])$.

Ainsi, par récurrence,

$$\forall x \in [a,b],\ |y(x)-z(x)| \leq L^n ||y-z||_\infty \frac{|x-a|^n}{n!}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\forall x \in [a,b],\ |y(x)-z(x)| \leq 0$, puis $y = z$.

$\boxed{\text{Existence}}$ (itérations de Picard)

On définit la suite de fonctions (y_k) telle que

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{k+1}(x) = y_0 + \int_a^x f(t, y_k(t))dt \end{cases}.$$

Par définition, $y_k \in \mathcal{C}_\infty([a,b])$.

Ainsi,

$$\forall x \in [a,b],\ y_{k+1}(x) - y_k(x) = \int_a^x f(t,y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))dt.$$

Or, f vérifie une condition de Lipschitz, d'où

$$\forall x \in [a,b],\ |y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq L \int_a^x |y_k(t) - y_{k-1}(t)|dt \leq L||y_k - y_{k-1}||_\infty |x-a|.$$

Puis, par récurrence,

$$\forall x \in [a,b],\ |y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq L^k ||y_1 - y_0||_\infty \frac{|x-a|^k}{k!} \leq L^k ||y_1 - y_0||_\infty \frac{|b-a|^k}{k!}.$$

Ensuite, comme $(k+i)! \geq k!i!$,

$$\forall x \in [a,b],\ |y_{k+p}(x) - y_k(x)| \leq L^k \frac{|b-a|^k}{k!} ||y_1 - y_0||_\infty \sum_{i=0}^{p-1} L^i \frac{|b-a|^i}{i!}.$$

Or, $\sum_{i=0}^{p-1} L^i \frac{|b-a|^i}{i!} \leq e^{L|b-a|}$, donc

$$\forall x \in [a,b],\ |y_{k+p}(x) - y_k(x)| \leq L^k \frac{|b-a|^k}{k!} ||y_1 - y_0||_\infty e^{L|b-a|}.$$

Il s'ensuit que (y_k) est de Cauchy dans $\mathcal{C}_\infty([a,b])$, donc (y_k) converge uniformément vers y de $\mathcal{C}_\infty([a,b])$. De plus, la limite y satisfait

$$\forall x \in [a,b],\ y(x) = y_0 + \int_a^x f(t, y(t))dt.$$

Remarque sur l'importance de la condition de Lipschitz Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

La condition de Lipschitz n'est pas vérifiée au voisinage de 0. $y(x) = x^3$ est solution sur $[0,1]$, et $y(x) = 0$ est solution sur $[0,1]$ également.

Méthodes numériques pour résoudre le problème de Cauchy.

Dans la suite de l'exposé, la fonction f satisfait les conditions du théorème 1.

Soit x_n une abscisse, on notera alors $y(x_n)$ la valeur théorique de la fonction y évaluée en x_n et y_n sa valeur approchée.

Méthodes à pas séparés

Ces méthodes sont du type

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n + h \\ h = \frac{b-a}{n} \\ y_0 \text{ est la condition initiale donnée} \\ y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h) \end{cases},$$

pour lesquelles il faut déterminer une fonction Φ continue candidate.

La détermination de Φ est réalisée en fonction de quatre notions ...

1. La consistance

La méthode est consistante avec l'équation différentielle si

$$\lim_{h\to 0} \max_n \left(\frac{1}{h}(y(x_{n+1}) - y(x_n)) - \Phi(x_n, y(x_n), h) \right) = 0,$$

pour $y \in \mathcal{C}([a,b])$ solution de l'équation différentielle.

Théorème 2

Une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode soit consistante avec l'équation différentielle est

$$\forall x \in [a,b],\ \forall y \in \mathcal{C}([a,b]),\ \Phi(x,y,0) = f(x,y).$$

Démonstration

Condition nécessaire

La méthode est consistante, donc

$$\lim_{h\to 0} \max_m \left(\frac{1}{h}(y(x_{m+1}) - y(x_m)) - \Phi(x_m, y(x_m), h) \right) = 0,$$

ou encore

$$\lim_{h\to 0} \max_m \left(\frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(t,y(t))dt - \Phi(x_m, y(x_m), h) \right) = 0.$$

Pour tout $x \in [a,b]$, il existe un encadrement $[x_m, x_{m+1}]$ tel que, même lorsque h tend vers 0 (i.e. lorsque n tend vers l'infini), $x \in [x_m, x_{m+1}]$. Dans ces conditions, $\lim_{h\to 0} x_m = x$ et $\lim_{h\to 0} x_{m+1} = x$.

La continuité des fonctions f et ϕ permet alors d'écrire

$$\lim_{h\to 0} \max_m \left(\frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(t,y(t))dt - \Phi(x_m, y(x_m), h) \right) = f(x,y(x)) - \Phi(x,y(x),0) = 0.$$

Condition suffisante

De $f(x,y(x)) = \Phi(x,y(x),0)$, il vient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h}\left(y(x_{n+1} - y(x_n)\right) - \Phi(x_n, y(x_n), h) \\
= & \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t,y(t))dt - \Phi(x_n, y(x_n), h) \\
= & \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(t,y(t)) - \Phi(x_n, y(x_n), h)\right) dt \\
= & \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\Phi(t,y(t),0) - \Phi(x_n, y(x_n), h)\right) dt
\end{aligned}$$

Et, d'après la continuité de Φ,

$$\lim_{h\to 0} \max_n \left(\Phi(t,y(t),0) - \Phi(x_n, y(x_n), h)\right) = 0,$$

puis

$$\lim_{h\to 0} \max_n \left(\frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t,y(t))dt - \Phi(x_n, y(x_n), h)\right) = 0.$$

2. La stabilité

Soit (y_n) solution de

$$\begin{cases} y_0 \text{ est la condition initiale donnée} \\ y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h) \end{cases},$$

et (z_n) solution de

$$\begin{cases} z_0 \text{ est la condition initiale donnée} \\ z_{n+1} = z_n + h(\Phi(x_n, z_n, h) + \varepsilon_n) \end{cases}.$$

La méthode est stable si $\exists M_1$, $\exists M_2$ indépendants de h, tels que $\max_n |y_n - z_n| \leq M_1|y_0 - z_0| + M_2 \max_n |\varepsilon_n|$.

Théorème 3

Si Φ vérifie la condition (dite de Lipschitz)

$$\textit{pour } h \textit{ suffisemment petit}, \forall x \in [a,b],\ \forall y \in \mathcal{C}([a,b]),\ \forall z \in \mathcal{C}([a,b]),$$

$$\exists M > 0 \textit{ tel que } |\Phi(x,y(x),h) - \Phi(x,z(x),h)| \leq M|y(x) - z(x)|,$$

$$\textit{où } M \textit{ est une constante indépendante de } h,$$

alors la méthode est stable.

<u>Démonstration</u>

$$|y_{n+1} - z_{n+1}| \leq |y_n - z_n| + h|\Phi(x_n, y_n, h) - \Phi(x_n, z_n, h)| + h|\varepsilon_n| \leq (1 + hM)|y_n - z_n| + h|\varepsilon_n|.$$

Ainsi, par récurrence,

$$|y_{n+1} - z_{n+1}| \leq (1 + hM)^{n+1}|y_0 - z_0| + \frac{(1 + hM)^{n+1} - 1}{M} \max_n |\varepsilon_n|.$$

D'où

$$|y_{n+1}-z_{n+1}| \leq e^{(n+1)hM}|y_0-z_0| + \frac{e^{(n+1)hM}-1}{M}\max_n|\varepsilon_n| \leq \underbrace{e^{(b-a)M}}_{=M_1}|y_0-z_0| + \underbrace{\frac{e^{(b-a)M}-1}{M}}_{=M_2}\max_n|\varepsilon_n|.$$

3. La convergence.

La méthode est convergente si

$$\lim_{h\to 0}\max_n|y_n-y(x_n)|=0.$$

Théorème 4

Si la méthode est stable et consistante, elle est convergente.

Démonstration

La solution y de l'équation différentielle vérifie

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\left(\Phi(x_n, y(x_n), h) + |\varepsilon_n|\right)$$

et $y(a)=y_0$, avec $\lim_{h\to 0}\max_n|\varepsilon_n|=0$, par définition de la consistance.

Puis, par stabilité,

$$\exists M_1,\ \exists M_2 \text{ indépendants de } h, \text{ tels que } \max_n|y_n-y(x_n)| \leq M_1\underbrace{|y_0-y(a)|}_{=0}+M_2\max_n|\varepsilon_n|.$$

D'où la convergence en faisant tendre h vers 0.

4. L'ordre de convergence.

La méthode est convergente d'ordre p si

$$\max_n\left(\frac{1}{h}(y(x_{n+1})-y(x_n)) - \Phi(x_n, y(x_n), h)\right) = O(h^p).$$

Théorème 5

Si la méthode est convergente d'ordre p, et si la fonction Φ satisfait la condition (dite de Lipschitz),

$$\textit{pour } h \textit{ suffisement petit, } \forall x\in[a,b],\ \forall y\in\mathcal{C}([a,b]),\ \forall z\in\mathcal{C}([a,b]),$$

$$\exists M>0 \textit{ tel que } |\Phi(x,y(x),h)-\Phi(x,z(x),h)| \leq M|y(x)-z(x)|,$$

$$\textit{où } M \textit{ est une constante indépendante de } h,$$

alors,

$$\max_n|y_n-y(x_n)| = O(h^p).$$

Démonstration

$$y(x_{n+1})-y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t,y(t))dt.$$

Par ailleurs, $y_{n+1}-y_n = h\Phi(x_n,y_n,h)$.

Soit $e_n = y_n - y(x_n)$.

Alors
$$e_{n+1} - e_n = h\left(\Phi(x_n, y_n, h) - \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y(t))dt\right).$$

Ou encore,

$$e_{n+1} = e_n + h\left(\Phi(x_n, y_n, h) - \Phi(x_n, y(x_n), h)\right) + h\left(\Phi(x_n, y(x_n), h) - \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y(t))dt\right).$$

D'où

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + h \underbrace{M|e_n|}_{\text{car } \Phi \text{ est de Lipschitz}} + \underbrace{Kh^{p+1}}_{\text{car la méthode est d'ordre } p}.$$

Puis,
$$|e_{n+1}| \leq (1 + hM)|e_n| + Kh^{p+1}.$$

Ainsi, par récurrence,
$$|e_n| \leq \frac{K}{M}\left((1 + hM)^{n+1} - 1\right)h^p.$$

Puis,
$$|e_n| \leq \frac{K}{M}\left(e^{(b-a)M} - 1\right)h^p = O(h^p).$$

$\boxed{\text{La méthode d'Euler}}$

$$\Phi(x,y,h) = f(x,y).$$

La méthode est consistante (trivial).

La méthode est stable (car f est de Lipshitz donc Φ également).

La méthode est convergente d'ordre 1 (en effet, $\Phi(x,y(x),h) - \frac{y(x+h)-y(x)}{h} = f(x,y(x)) - \frac{y(x+h)-y(x)}{h} = O(h)$ si on suppose la fonction y dérivable deux fois).

$\boxed{\text{Les méthodes de Rünge et Kutta}}$

$$k_1 = f(x,y),$$

$$k_2 = f(x+\Theta_2 h, y + h a_{2,1} k_1),$$

$$\ldots,$$

$$k_r = f(x+\Theta_r h, y + h\sum_{i=1}^{r} a_{r,i} k_i).$$

$$\Phi(x,y,h) = \sum_{i=1}^{r} c_i k_i.$$

r s'appelle le rang de la méthode de Rünge et Kutta.

La méthode est consistante si et seulement si $\sum_{i=1}^{r} c_i$.

La méthode est stable (car f est de Lipshitz donc Φ également).

En effet,

k_1 est trivialement de Lipschitz ;

$$\begin{aligned}
& |f(x+\Theta_2 h, y+ha_{2,1}f(x,y)) - f(x+\Theta_2 h, z+ha_{2,1}f(x,z))| \\
\leq\ & L|y+a_{2,1}hf(x,y) - z - a_{2,1}hf(x,z)| \\
\leq\ & L|y-z| + hL|a_{2,1}||f(x,y)-f(x,z)| \\
\leq\ & L|y-z|(1+hL|a_{2,1}|) \text{ donc } k_2 \text{ est de Lipschitz.}
\end{aligned}$$

Par suite, tous les k_i sont de Lipschitz (par récurrence).

Quelles sont les méthodes de Rünge et Kutta qui sont d'ordre 2 ?

$$\frac{1}{h}\left(y(x+h)-y(x)\right) = \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=f(x,y)} + \frac{h}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + O(h^2),$$

si on suppose la fonction y dérivable trois fois par rapport à x.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(f(x,y(x))\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,y(x))\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f(x,y(x))\right)\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=f(x,y)}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{h}\left(y(x+h)-y(x)\right) = f(x,y) + \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,y(x))\right) + \frac{h}{2}f(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\left(f(x,y(x))\right) + O(h^2).$$

Recherche parmi les méthodes de Rünge et Kutta de rang 2.

$$\begin{aligned} & \Phi(x,y(x),h) \\ = \;& c_1 f(x,y) + c_2 f(x+\Theta_2 h, y + h a_{2,1} f(x,y)) \\ = \;& (c_1+c_2)f(x,y) + c_2\Theta_2 h\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,y(x))\right) + c_2 a_{2,1} h f(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\left(f(x,y(x))\right) + O(h^2). \end{aligned}$$

Par identification, on trouve

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2\Theta_2 = \frac{1}{2} \\ c_2 a_{2,1} = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Par exemple, si on prend

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \\ \Theta_2 = a_{2,1} = \frac{1}{2} \end{cases},$$

on a

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n,y_n)),$$

méthode qui est connue sous le nom de méthode d'Euler améliorée.

Références

[1] C. Brezinski, *Analyse Numérique Discrète*, Publications du Laboratoire de Calcul de l'Université des Sciences et Techniques de Lille.