Exemples de polynômes orthogonaux classiques

Denis Vekemans *

1 Les polynômes de Legendre

Définition P_n est un polynôme de Legendre de degré n si

$$\int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)dx = 0 \text{ si } i \neq j$$

et si $P_n(1) = 1$.

Propriétés

1. $$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n[(x^2-1)^n]$$
   où $D : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ f(x) \longrightarrow f'(x)$ pour $f \in C^1([-1,1])$;
2. $$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{n} \left(C_n^j\right)^2 (x-1)^{n-j}(x+1)^j \ ;$$
3. $$P_n\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^n} \sum_{j=0}^{n} \left(C_n^j\right)^2 x^{n-j} \ ;$$
4. P_n a même parité que n ;
5. $$P_n'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1-(-1)^{n+j}}{\int_{-1}^{1} P_j^2(x)dx} P_j(x) \ ;$$
6. Les polynômes P_n satisfont la relation de récurrence à trois termes
   $$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$
   pour $n \geq 1$ avec $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$;
7. $$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1} \ ;$$
8. $$\sum_{n \geq 0} P_n(x) z^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

2 Les polynômes de Tchébychev de première et seconde espèce

Définition Les fonctions de Tchébychev de première (T_n) et seconde (U_n) espèce sont définies sur $I = [-1, 1]$ par

$$\left\{\begin{array}{l} T_n(x) = \cos(n\Theta) \\ U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\Theta)}{\sin\Theta} \end{array}\right\} \text{avec } \Theta = \arccos x.$$

Propriétés

1. Les fonctions T_n satisfont la relation de récurrence à trois termes
$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$$
pour $n \geq 1$ avec $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$;
2. Les fonctions T_n sont des fonctions polynômes ;
3. $$T_n'(x) = nU_{n-1}(x) \ ;$$
4. Les fonctions U_n sont des fonctions polynômes ;
5. $$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \text{ si } n \neq m \ ;$$
6. $$\int_{-1}^{1} T_n^2(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \ ;$$
7. $$\begin{array}{rcl} T_n(x) & = & \frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right], \\ \text{pour } x & \in &]-\infty,-1]\bigcup[1,\infty[\ ; \end{array}$$
8. Le coefficient du terme de plus haut degré de T_n est 2^{n-1} si $n \geq 1$ et 1 pour $n = 0$;
9. Les polynômes T_n satisfont l'équation différentielle
$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0 \ ;$$
10. T_n est proportionnel au polynôme W_n défini par
$$W_n(x) = \sqrt{1-x^2}D^n\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$
où $D : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) \longrightarrow f'(x)$ pour $f \in C^1([-1, 1])$.

3 Les polynômes de Laguerre

Définition Les polynômes de Laguerre L_n^α (où α est réel strictement positif) sont définis comme étant unitaires, de degré n, et solutions de l'équation différentielle

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0.$$

Propriétés

1. Si on pose
$$L_n^\alpha(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
alors
$$a_k = C_n^k (-1)^{n-k} \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + k + 1)}$$
avec $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$;
2. Les polynômes L_n^α satisfont la relation de récurrence à trois termes
$$L_{n+1}^\alpha(x) + (\alpha + 2n + 1 - x)L_n^\alpha(x) + n(n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0$$
pour $n \geq 1$ avec $L_0^\alpha(x) = 1$ et $L_1^\alpha(x) = x - (\alpha + 1)$;
3. $$\int_0^\infty L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} dx = 0, \text{ si } m \neq n \ ;$$
4. $$\int_0^\infty \left(L_n^\alpha\right)^2 (x) e^{-x} dx = n!\Gamma(\alpha + n + 1).$$

4 Les polynômes d'Hermite

Définition Les fonctions d'Hermite H_n satisfont

$$\begin{aligned} G(x,w) &= e^{2xw - w^2} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{H_n(x)}{n!} w^n, \end{aligned}$$

où w est un réel.

Propriétés

1. Les fonctions H_n sont polynômiales, de degré n ;
2. $$2nH_{n-1}(x) = H_n'(x) \ ;$$
3. $$\int_{-\infty}^\infty G(x,w)G(x,\overline{w}) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{2w\overline{w}} \ ;$$

4. Les polynômes H_n satisfont

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx = 0 \text{ si } n \neq m \ ;$$

5.

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x)e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}2^n n! \ ;$$

6. Les polynômes H_n satisfont la relation de récurrence à trois termes

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

pour $n \geq 1$ avec $H_0(x) = 1$ et $H_1(x) = 2x$;

7.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n[e^{-x^2}] \ ;$$

8. Les polynômes H_n satisfont l'équation différentielle

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Références

[1] C. Brezinski, *Padé-type Approximations and General Orthogonal Polynomials*, volume 50 of ISNM, Birkhaüser-Verlag, Basel, 1980.

[2] J. Van Iseghem, *Polynômes orthogonaux ; Synthèse des présentations de polynômes orthogonaux classiques ; Extensions*, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique et Optimisation de l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois, 1988.