

Exemples de polynômes orthogonaux classiques – Démonstrations des propriétés –

Denis Vekemans *

1 Les polynômes de Legendre

Propriétés

1. On choisit $i < j$ et on obtiendrait par symétrie un résultat analogue lorsque $j < i$.

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 D^i[(x^2 - 1)^i] D^j[(x^2 - 1)^j] dx \\
 = & - \int_{-1}^1 D^{i+1}[(x^2 - 1)^i] D^{j-1}[(x^2 - 1)^j] dx \\
 & + \underbrace{[D^i[(x^2 - 1)^i] D^{j-1}[(x^2 - 1)^j]]_{-1}^1}_{=0 \text{ car } D^k[(x^2-1)^j]|_{\{-1,1\}}=0, \forall k \in \{0,1,\dots,j-1\}} \\
 = & \dots \\
 = & (-1)^j \int_{-1}^1 D^{i+j}[(x^2 - 1)^i] D^0[(x^2 - 1)^j] dx \\
 & + \underbrace{[D^{i+j-1}[(x^2 - 1)^i] D^0[(x^2 - 1)^j]]_{-1}^1}_{=0 \text{ car } D^k[(x^2-1)^j]|_{\{-1,1\}}=0, \forall k \in \{0,1,\dots,j-1\}} \\
 = & (-1)^j \int_{-1}^1 \underbrace{D^{i+j}[(x^2 - 1)^i]}_{=0 \text{ car si } i < j, D^{i+j}[(x^2-1)^i] dx=0} (x^2 - 1)^j dx \\
 = & 0
 \end{aligned}$$

Un calcul explicite de P_n à l'aide de la formule de Leibniz fournit :

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{j=0}^n C_n^j \frac{n!}{(n-j)!} (x-1)^{n-j} \frac{n!}{j!} (x+1)^j \\
 &= \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^n (C_n^j)^2 (x-1)^{n-j} (x+1)^j
 \end{aligned}$$

Et, il s'ensuit que $P_n(1) = 1$.

2. Voir plus haut.

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

3. On a $P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^n (C_n^j)^2 (x-1)^{n-j} (x+1)^j$, d'où on déduit

$$\begin{aligned} & P_n\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^n (C_n^j)^2 \left(\frac{2x}{1-x}\right)^{n-j} \left(\frac{2}{1-x}\right)^j \\ &= \frac{1}{(1-x)^n} \sum_{j=0}^n (C_n^j)^2 x^{n-j}. \end{aligned}$$

4. Immédiat car W_n tel que $W_n(x) = (x^2 - 1)^n$ est un polynôme pair, ce qui induit que P_n , qui est le polynôme dérivé n fois de W_n , est un polynôme de même parité que n .

5. $P'_n = \sum_{j=0}^{n-1} b_j P_j$ où $b_j \in \mathbb{R}$, car P_j est de degré j . On déduit donc

$$\int_{-1}^1 P'_n(x) P_j(x) dx = b_j \int_{-1}^1 P_j^2(x) dx.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P'_n(x) P_j(x) dx \\ &= - \underbrace{\int_{-1}^1 P_n(x) P'_j(x) dx}_{=0 \text{ car } \deg P'_j < n} \\ &+ \underbrace{[P_n(x) P_j(x)]_{-1}^1}_{=1 - (-1)^{n+j} \text{ car } P_n \text{ est de la parité de } n \text{ et que } P_n(1)=1} \end{aligned}$$

6. $P_0(x) = 1$ car P_0 est de degré 0 et tel que $P_0(1) = 1$.

$P_1(x) = x$ car P_1 est de degré 1, impair et tel que $P_1(1) = 1$.

On a encore

$$P_{n+1}(x) = (B_n + xA_n)P_n(x) + C_n P_{n-1}(x).$$

En effet, on peut écrire $P_{n+1}(x) = (B_n + xA_n)P_n(x) + C_n P_{n-1}(x) + \sum_{j=0}^{n-2} a_j P_j(x)$, ce qui implique que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_{n+1}(x) P_k(x) dx &= \int_{-1}^1 (B_n + xA_n) P_n(x) P_k(x) dx \\ &+ C_n \int_{-1}^1 P_{n-1}(x) P_k(x) dx \\ &+ \sum_{j=0}^{n-2} a_j \int_{-1}^1 P_j(x) P_k(x) dx, \end{aligned}$$

et, pour $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, cela fournit $a_k \int_{-1}^1 P_k^2(x) dx = 0$ puis $a_k = 0$ car $\int_{-1}^1 P_k^2(x) dx \neq 0$.

Recherche de A_n

Soit a_n le coefficient du terme de plus haut degré de P_n .

$$\begin{aligned} a_n x^n &= \frac{1}{2^n n!} D^n [x^{2n}] \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{n!} \end{aligned}$$

Or, $A_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, donc $A_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

Recherche de B_n

$B_n = 0$ car P_n est de même parité que n .

Recherche de C_n

On a $P_n(1) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Donc, $1 = A_n + C_n$. Puis, $C_n = \frac{-n}{n+1}$.

7. D'après la relation de récurrence à trois termes, on obtient

$$0 = (n+1) \underbrace{\int_{-1}^1 P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)dx}_{=0} - (2n+1) \int_{-1}^1 xP_n(x)P_{n-1}(x)dx + n \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x)dx.$$

$$0 = (n+1) \underbrace{\int_{-1}^1 P_{n+1}(x)P_n(x)dx}_{=0} - (2n+1) \int_{-1}^1 xP_n^2(x)dx + n \underbrace{\int_{-1}^1 P_{n-1}(x)P_n(x)dx}_{=0}.$$

$$0 = (n+1) \int_{-1}^1 P_{n+1}^2(x)dx - (2n+1) \int_{-1}^1 xP_n(x)P_{n+1}(x)dx + n \underbrace{\int_{-1}^1 P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)dx}_{=0}.$$

De la troisième égalité, on déduit

$$n \int_{-1}^1 P_n^2(x)dx - (2n-1) \int_{-1}^1 xP_{n-1}(x)P_n(x)dx = 0.$$

De la première égalité,

$$-(2n+1) \int_{-1}^1 xP_n(x)P_{n-1}(x)dx + n \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x)dx = 0.$$

Ainsi,

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx = \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x)dx = 0.$$

Par récurrence, il vient

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx = \frac{1}{2n+1} \underbrace{\int_{-1}^1 P_0^2(x)dx}_{=2} = \frac{2}{2n+1}.$$

8. Soit $G_n(z) = \sum_{n \geq 0} P_n(x)z^n$.

En dérivant,

$$\begin{aligned}
 G'_n(z) &= \sum_{n \geq 1} n P_n(x) z^{n-1} \\
 &= \sum_{n \geq 0} (n+1) P_{n+1}(x) z^n \\
 &= \sum_{n \geq 0} ((2n+1)x P_n(x) - n P_{n-1}(x)) z^n \\
 &= x \sum_{n \geq 0} (2n+1) P_n(x) z^n - \sum_{n \geq 1} n P_{n-1}(x) z^n.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 -2xz G'_n(z) &= -2x \sum_{n \geq 1} n P_n(x) z^n, \\
 z^2 G'_n(z) &= \sum_{n \geq 2} (n-1) P_{n-1}(x) z^n, \\
 z G_n(z) &= \sum_{n \geq 1} P_{n-1}(x) z^n,
 \end{aligned}$$

et,

$$-x G_n(z) = -x \sum_{n \geq 0} P_n(x) z^n.$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned}
 &(1 - 2xz + z^2) G'_n(z) \\
 &= x \sum_{n \geq 0} (2n+1) P_n(x) z^n - \sum_{n \geq 1} n P_{n-1}(x) z^n \\
 &\quad - 2x \sum_{n \geq 1} n P_n(x) z^n + \sum_{n \geq 2} (n-1) P_{n-1}(x) z^n \\
 &= x \sum_{n \geq 0} P_n(x) z^n - P_0(x) z - \sum_{n \geq 2} P_{n-1}(x) z^n \\
 &= x \sum_{n \geq 0} P_n(x) z^n - \sum_{n \geq 1} P_{n-1}(x) z^n \\
 &= (x - z) G_n(z)
 \end{aligned}$$

La résolution de l'équation différentielle

$$\begin{aligned}
 \frac{G'_n(z)}{G_n(z)} &= \frac{x - z}{1 - 2xz + z^2} \\
 &= \frac{-u'(z)}{2u(z)},
 \end{aligned}$$

avec $u(z) = 1 - 2xz + z^2$.

Puis,

$$G_n(z) = \frac{a}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}.$$

Or, $P_n(1) = 1$, donc, lorsque $x = 1$, $G_n(z) = \frac{1}{1-z}$, ce qui donne $a = 1$.

Pour conclure,

$$G_n(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}.$$

2 Les polynômes de Tchébychev de première et seconde espèce

Propriétés

1. La formule trigonométrique

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p - q}{2}\right) \cos\left(\frac{p + q}{2}\right)$$

avec $p = (n + 1)\Theta$ et $q = (n - 1)\Theta$ fournit immédiatement le résultat.

2. Une récurrence simple depuis la formule de récurrence à trois termes induit que les fonctions T_n sont des fonctions polynômes.

3.

$$\frac{dT_n(x)}{dx} = \frac{dT_n(x)}{d\Theta \frac{dx}{d\Theta}} = n \frac{\sin(n\Theta)}{\sin \Theta}.$$

4. Les fonctions U_n sont des fonctions polynômes comme dérivées de fonctions polynômes.

5.

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= - \int_{\pi}^0 \cos(n\Theta) \cos(m\Theta) d\Theta \text{ avec } \Theta = \arccos x \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\cos((n + m)\Theta) + \cos((n - m)\Theta)) d\Theta \\ &= 0 \text{ car } n \neq m \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 T_n^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\cos((2n)\Theta) + \cos((0)\Theta)) d\Theta \text{ (voir ci - haut)} \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} d\Theta \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

7. Soit

$$Z_n(x) = \frac{1}{2} \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \right],$$

pour $x \in]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$.

On a $Z_0(x) = 1$ et $Z_1(x) = x$.

De plus,

$$\begin{aligned}
 & Z_{n-1}(x) + Z_{n+1}(x) \\
 = & \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & (x + \sqrt{x^2 - 1})^n \left(x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right) \\ & + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \left(x - \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \right) \end{aligned} \right] \\
 = & \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & (x + \sqrt{x^2 - 1})^n \left(x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{1} \right) \\ & + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \left(x - \sqrt{x^2 - 1} + \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{1} \right) \end{aligned} \right] \\
 = & 2x \frac{1}{2} \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \right] \\
 = & 2x Z_n(x)
 \end{aligned}$$

Ainsi, les fonctions Z_n vérifient la même relation de récurrence à trois termes que les T_n , ce qui implique

$$Z_n = T_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

8. C'est immédiat par une récurrence simple depuis la formule de récurrence à trois termes.

9. On a

$$T_n(x) = \cos(\arccos x) ;$$

$$T'_n(x) = \sin(\arccos x) \frac{n}{\sqrt{1 - x^2}} ;$$

et

$$T''_n(x) = \cos(\arccos x) \frac{-n^2}{1 - x^2} + \sin(\arccos x) \frac{nx}{\sqrt{1 - x^2}(1 - x^2)}.$$

Et, le résultat découle directement.

10. Soit $k < n$,

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 W_n(x) x^k \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
 = & \int_{-1}^1 D^n \left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}} \right] x^k dx \\
 = & - \int_{-1}^1 D^{n-1} \left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}} \right] (kx^{k-1}) dx \\
 & + \underbrace{\left[D^{n-1} \left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}} \right] x^k \right]_{-1}^1}_{=0 \text{ car } D^q \left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}} \right] \Big|_{\{-1,1\}} = 0, \forall q \in \{0,1,\dots,n-1\}} \\
 = & \dots \\
 = & (-1)^k \int_{-1}^1 D^{n-k} \left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}} \right] (k!) dx \\
 & + (-1)^{k-1} \underbrace{\left[D^{n-k} \left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}} \right] (k!x) \right]_{-1}^1}_{=0 \text{ car } D^q \left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}} \right] \Big|_{\{-1,1\}} = 0, \forall q \in \{0,1,\dots,n-1\}} \\
 = & (-1)^k k! \int_{-1}^1 D^{n-k} \left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}} \right] dx \\
 = & (-1)^k k! \underbrace{\left[D^{n-k-1} \left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}} \right] \right]_{-1}^1}_{=0 \text{ car } D^q \left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}} \right] \Big|_{\{-1,1\}} = 0, \forall q \in \{0,1,\dots,n-1\}} \\
 = & 0.
 \end{aligned}$$

Donc, pour tout polynôme p de degré strictement inférieur à n ,

$$\int_{-1}^1 W_n(x) p(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

En particulier, pour $p(x) = W_k(x)$ où $k < n$ car il est évident que W_k est un polynôme.

Ainsi, les polynômes W_n sont orthogonaux pour le même produit scalaire que les polynômes T_n . Il s'ensuit que ces polynômes sont proportionnels.

3 Les polynômes de Laguerre

Propriétés

- Après avoir dérivé deux fois $L_n^\alpha(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, le calcul de $xy'' + (\alpha+1-x)y' + ny = 0$ nous donne

$$\begin{cases}
 na_0 + (\alpha + 1)a_1 = 0, \text{ (terme constant)} \\
 k(k + 1)a_{k+1} - ka_k + (\alpha + 1)(k + 1)a_{k+1} + na_k = 0, \\
 \quad \text{(terme en } x^k, \text{ pour } k \text{ variant de } 1 \text{ à } n - 1 \text{ et avec } a_n = 1) \\
 -na_n + na_n = 0, \text{ (terme dominant)}
 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k-n}{(k+1)(\alpha+k+1)}, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Comme $a_n = 1$ et $a_k = \frac{(k+1)(\alpha+k+1)}{k-n} a_{k+1}$, $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on déduit

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{[(k+1)(k+2)\dots(n)][(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n)]}{(k-n)(k+1-n)\dots(n-1-n)}, \\ \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \\ &= (-1)^{n-k} C_n^k [(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n)], \\ \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \\ &= C_n^k (-1)^{n-k} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \end{aligned}$$

2. Il est évident que $L_0^\alpha(x) = 1$ et $L_1^\alpha(x) = x - (\alpha + 1)$.

Comme le polynôme L_n^α est unitaire et de degré n , on a :

$$L_{n+1}^\alpha(x) = xL_n^\alpha(x) + A_n L_n^\alpha(x) + B_n L_{n-1}^\alpha(x) + \sum_{k=0}^{n-2} L^k(x) b_k$$

où les $(b_k)_{k \in \{0, 1, \dots, n-2\}}$, A_n et B_n sont déterminés de façon unique. On pose

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} x^k,$$

avec $a_k^{(n)} = (-1)^{n-k} C_n^k [(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n)]$, $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ et $a_n^{(n)} = 1$.

On déduit en remplaçant dans l'égalité précédente que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} a_k^{(n+1)} x^k &= \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} x^{k+1} + A_n \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} x^k \\ &\quad + B_n \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n-1)} x^k + \sum_{l=0}^{n-2} b_l \sum_{k=0}^l a_k^{(l)} x^k. \end{aligned}$$

Recherche de A_n

Le terme en x^n de la précédente égalité donne

$$\begin{aligned} 0 &= -a_n^{(n+1)} + A_n a_n^{(n)} + a_{n-1}^{(n)} \\ \iff 0 &= (n+1)(\alpha+n+1) + A_n - n(\alpha+1) \\ \iff A_n &= -\alpha - 2n - 1. \end{aligned}$$

Recherche de B_n

Le terme en x^{n-1} de la précédente égalité donne

$$0 = -a_{n-1}^{(n+1)} + A_n a_{n-1}^{(n)} + a_{n-2}^{(n)} + B_n a_{n-1}^{(n-1)}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow 0 &= -\frac{n(n+1)(\alpha+n)(\alpha+n+1)}{2} - (-\alpha-2n-1)(n)(\alpha+n) \\
 &\quad + \frac{(n-1)n(\alpha+n-1)(\alpha+n)}{2} + B_n \\
 &\Leftrightarrow B_n = -n(\alpha+n).
 \end{aligned}$$

Recherche des b_k

On montre de façon directe que $b_k = 0$, pour $k \in \{0, 1, n-2\}$.

Le terme en x^k de la précédente égalité donne, pour $k \in \{1, 2, n-2\}$,

$$\begin{aligned}
 0 &= -a_k^{(n+1)} + A_n a_k^{(n)} + a_{k-1}^{(n)} + B_n a_k^{(n-1)} + b_k \\
 \Leftrightarrow 0 &= C_{n+1}^k [(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n+1)] \\
 &\quad + (-\alpha-2n-1)C_n^k [(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n)] \\
 &\quad - C_n^{k-1} [(\alpha+k)(\alpha+k+1)\dots(\alpha+n)] \\
 &\quad - (-n(\alpha+n))C_{n-1}^k [(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n-1)] + b_k \\
 \Leftrightarrow 0 &= C_n^k [(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n)] \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{n+1}{n+1-k}(\alpha+n+1) - (\alpha+2n+1) \\ -\frac{k}{n+1-k}(\alpha+k) + (n-k) \end{array} \right\} + b_k. \\
 &\Leftrightarrow b_k = 0.
 \end{aligned}$$

Le terme constant de la précédente égalité donne

$$\begin{aligned}
 0 &= -a_0^{(n+1)} + A_n a_0^{(n)} + B_n a_0^{(n-1)} + b_0 \\
 \Leftrightarrow 0 &= C_{n+1}^0 [(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n+1)] \\
 &\quad + (-\alpha-2n-1)C_n^0 [(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)] \\
 &\quad - (-n(\alpha+n))C_{n-1}^0 [(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)] + b_0 \\
 \Leftrightarrow 0 &= [(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)] \\
 &\quad \{(\alpha+n+1) - (\alpha+2n+1) + (n)\} + b_0. \\
 &\Leftrightarrow b_0 = 0.
 \end{aligned}$$

3. Par définition,

$$xL_n''^\alpha(x) + (\alpha+1-x)L_n'^\alpha(x) + nL_n^\alpha(x) = 0.$$

Calcul de $D[xL_n'^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}]$

$$\begin{aligned}
 D[L_n'^\alpha(x)x^{\alpha+1}e^{-x}] &= L_n''^\alpha(x)x^{\alpha+1}e^{-x} + (\alpha+1)L_n'^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} \\
 &\quad - L_n'^\alpha(x)x^{\alpha+1}e^{-x} \\
 &= x^\alpha e^{-x} \left[\underbrace{xL_n''^\alpha(x) + (\alpha+1-x)L_n'^\alpha(x)}_{=-nL_n^\alpha(x)} \right]
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$D [L_n'^\alpha(x)x^{\alpha+1}e^{-x}] = x^\alpha e^{-x}(-nL_n^\alpha(x))$$

et

$$D [L_m'^\alpha(x)x^{\alpha+1}e^{-x}] = x^\alpha e^{-x}(-mL_m^\alpha(x)).$$

On a

$$\begin{aligned} & D [L_m^\alpha(x)L_n'^\alpha(x)x^{\alpha+1}e^{-x}] \\ &= L_m'^\alpha(x)L_n'^\alpha(x)x^{\alpha+1}e^{-x} + L_m^\alpha(x)L_n''^\alpha(x)x^{\alpha+1}e^{-x} \\ &+ (\alpha + 1)L_m^\alpha(x)L_n'^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} - L_m^\alpha(x)L_n'^\alpha(x)x^{\alpha+1}e^{-x} \\ &= L_m^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} [(\alpha + 1 - x)L_n'^\alpha(x) + xL_n''^\alpha(x)] \\ &+ x^{\alpha+1}e^{-x}L_m'^\alpha(x)L_n'^\alpha(x) \\ &= L_m^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} [-nL_n^\alpha(x)] + x^{\alpha+1}e^{-x}L_m'^\alpha(x)L_n'^\alpha(x) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & D [(L_m^\alpha(x)L_n'^\alpha(x) - L_m'^\alpha(x)L_n^\alpha(x))x^{\alpha+1}e^{-x}] \\ &= L_m^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} [-nL_n^\alpha(x)] - L_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} [-mL_m^\alpha(x)] \\ &= (m - n)x^\alpha e^{-x}L_n^\alpha(x)L_m^\alpha(x) \\ &= L_m^\alpha(x)D [L_n'^\alpha(x)x^{\alpha+1}e^{-x}] - L_n^\alpha(x)D [L_m'^\alpha(x)x^{\alpha+1}e^{-x}] \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} & (m - n) \int_0^\infty L_m^\alpha(x)L_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} dx \\ &= [(L_m^\alpha(x)L_n'^\alpha(x) - L_m'^\alpha(x)L_n^\alpha(x))x^{\alpha+1}e^{-x}]_0^\infty \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne $\int_0^\infty L_m^\alpha(x)L_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} dx = 0$ si $n \neq m$.

4. Depuis la formule de récurrence à trois termes, on tire

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty L_{n+1}^\alpha(x)L_{n+1}^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty xL_n^\alpha(x)L_{n+1}^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} dx, \quad \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

car la formule de récurrence à trois termes peut être étendue au cas $n = 0$ en convenant $L_{-1}^\alpha(x) = 0$,
et,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty xL_n^\alpha(x)L_{n-1}^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} dx \\ &= n(\alpha + n) \int_0^\infty L_{n-1}^\alpha(x)L_{n-1}^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} dx, \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

On déduit alors

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty L_n^\alpha(x)L_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} dx \\ &= n(\alpha + n) \int_0^\infty L_{n-1}^\alpha(x)L_{n-1}^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} dx, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Puis, par une récurrence simple,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty L_n^\alpha(x)L_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} dx \\ &= n! \underbrace{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n)}_{=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)}} \underbrace{\int_0^\infty L_0^\alpha(x)L_0^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} dx}_{=\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Le résultat

$$\int_0^\infty (L_n^\alpha(x))^2 e^{-x} dx = n! \Gamma(\alpha + n + 1),$$

est alors immédiat.

4 Les polynômes d’Hermite

Propriétés

1. On montre ce résultat par récurrence sur n .

Pour $w = 0$, $H_0(x) = e^{2x \cdot 0 - 0^2} = 1$ et est un polynôme de degré 0.

$$\frac{dG(x, w)}{dx} = 2we^{2xw-w^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{w^n}{n!} H'_n(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{w^n}{n!} H'_n(x).$$

Et, d’autre part,

$$2we^{2xw-w^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{2w^{n+1}}{n!} H_n(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{2w^n}{(n-1)!} H_{n-1}(x).$$

Ainsi, en identifiant les termes en w^n , on obtient

$$2nH_{n-1}(x) = H'_n(x).$$

Et, par une récurrence simple, H_n est un polynôme de degré n .

2. Immédiat (voir ci-haut).

3.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty G(x, w)G(x, \bar{w})e^{-x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{2xw-w^2+2x\bar{w}-\bar{w}^2-x^2} dx \\ &= e^{2w\bar{w}} \int_{-\infty}^\infty e^{-(x-w-\bar{w})^2} dx \\ &= e^{2w\bar{w}} \int_{-\infty}^\infty e^{-(u)^2} dx \text{ avec } u = x - w - \bar{w} \\ &= \sqrt{\pi} e^{2w\bar{w}} \end{aligned}$$

4. La précédente propriété donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m \geq 0} \frac{\bar{w}^m}{m!} H_m(x) \sum_{n \geq 0} \frac{w^n}{n!} H_n(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{2w\bar{w}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m \geq 0} \frac{\bar{w}^m}{n!m!} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx \right) w^n &= \sqrt{\pi} e^{2w\bar{w}} \\ &= \sqrt{\pi} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2^n}{n!} \bar{w}^n \right) w^n. \end{aligned}$$

En poursuivant,

$$\sum_{m \geq 0} \frac{\bar{w}^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n \bar{w}^n.$$

Ainsi, si $n \neq m$, $\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 0$ et $\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n n!$.

5. Immédiat (voir ci-haut).

6.

$$\begin{aligned} \frac{dG(x, w)}{dw} &= 2(x - w)e^{2xw - w^2} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{nw^{n-1}}{n!} H_n(x) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{nw^{n-1}}{n!} H_n(x) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{w^n}{n!} H_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Et, d'autre part,

$$\begin{aligned} 2(x - w)e^{2xw - w^2} &= \sum_{n \geq 0} \frac{2xw^n}{n!} H_n(x) - \sum_{n \geq 0} \frac{2w^{n+1}}{n!} H_n(x) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{2xw^n}{n!} H_n(x) - \sum_{n \geq 1} \frac{2w^n}{(n-1)!} H_{n-1}(x). \end{aligned}$$

D'où,

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

pour $n \geq 1$ avec $H_0(x) = 1$ et $H_1(x) = 2xH_0(x) = 2x$.

7. Par récurrence.

$$H_0(x) = (-1)^0 e^{x^2} D^0[e^{-x^2}] = 1.$$

$$H_1(x) = (-1)^1 e^{x^2} D^1[e^{-x^2}] = 2x.$$

Si

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n[e^{-x^2}],$$

alors

$$\underbrace{H'_n(x)}_{=2nH_{n-1}(x)} = (-1)^n 2xe^{x^2} D^n[e^{-x^2}] + (-1)^n e^{x^2} D^{n+1}[e^{-x^2}].$$

Or

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

pour $n \geq 1$, donc

$$H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} e^{x^2} D^{n+1}[e^{-x^2}].$$

8. H_0 satisfait l'équation différentielle

$$y'' - 2xy' = 0.$$

H_1 satisfait l'équation différentielle

$$y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

On a

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + \underbrace{2nH_{n-1}(x)}_{=H'_n(x)} = 0$$

pour $n \geq 1$.

Donc

$$\underbrace{H'_{n+1}(x)}_{=2(n+1)H_n(x)} - 2xH'_n(x) - 2H_n(x) + H''_n(x) = 0$$

pour $n \geq 1$.

Donc,

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0$$

pour $n \geq 1$.

Références

- [1] C. Brezinski, *Padé-type Approximations and General Orthogonal Polynomials*, volume 50 of ISNM, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1980.
- [2] J. Van Iseghem, *Polynômes orthogonaux; Synthèse des présentations de polynômes orthogonaux classiques; Extensions*, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique et Optimisation de l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois, 1988.