# *Polynômes orthogonaux classiques*

Denis Vekemans *

Soit $c$ une fonctionnelle linéaire

$$c(x^i) = \int_\Omega x^i \rho(x) dx$$

où $\rho$ est une fonction poids strictement positive sur $\overset{\circ}{\Omega}$ .
On définit le produit scalaire suivant :

$$\langle P(x), Q(x) \rangle_\rho = c(P(x)Q(x))$$

Soit $\sigma$ et $\tau$ deux polynômes de degrés 2 et 1 tels que

$$(\sigma\rho)' = \tau\rho$$

Une famille de polynômes est dite classiquement orthogonale si elle est orthogonale pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle_\rho$ où $\rho$ est une fonction poids telle qu'il existe $\sigma$ et $\tau$ deux polynômes de degrés 2 et 1 tels que $(\sigma\rho)' = \tau\rho$ et où $\lim_{x \to Fr(\Omega)} \sigma(x) x^i \rho(x) = 0, \forall i \in \mathbb{N}$.

**Remarques** :

1. Si $\rho(x) = e^{-x^2}$, $\Omega = ]-\infty, \infty[$, $\sigma(x) = a$ et $\tau(x) = -2ax$. Polynômes d'Hermite.
2. Si $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\Omega = ]0, \infty[$, $\sigma(x) = ax$ et $\tau(x) = a(-x + \alpha + 1)$. Polynômes de Laguerre.
3. Si $\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $\Omega = ]-1, 1[$, $\sigma(x) = a(1-x^2)$ et $\tau(x) = a((\beta - \alpha) - x(\alpha + \beta))$. Polynômes de Jacobi.

**Théorème**

On a équivalence entre les quatre propriétés suivantes :

1. Les polynômes $P_n$ vérifient la formule de Rodrigues

$$\rho(x) P_n(x) = Z_n D^n [\rho(x) \sigma^n(x)]$$

où $Z_n \in \mathbb{R}$

2. Les polynômes $P_n$ satisfont l'équation différentielle

$$\sigma(x) P_n''(x) + \tau(x) P_n'(x) + \lambda_n P_n(x) = 0$$

où $\lambda_n \in \mathbb{R}$ (on peut évaluer $\lambda_n = -n\tau'(x) - \frac{n(n-1)}{2} \sigma''(x)$).

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

3. Les polynômes $P_n$ sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle_\rho$ et les polynômes $P'_n$ sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle_{\sigma\rho}$
4. Les polynômes $P_n$ vérifient une relation de récurrence à trois termes

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x)$$

et les polynômes $P'_n$ vérifient la relation récursive

$$\sigma(x)P'_n(x) = (\widetilde{\alpha_n}x + \widetilde{\beta_n})P_n(x) + \widetilde{\gamma_n}P_{n-1}(x)$$

où $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \widetilde{\alpha_n}, \widetilde{\beta_n}, \widetilde{\gamma_n} \in \mathbb{R}$

**Quelques autres propriétés** :

1. Formule de Darboux Christoffel

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(y)}{\langle P_k(x), P_k(x) \rangle_\rho} = \frac{1}{\langle P_n(x), P_n(x) \rangle_\rho} \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}$$

où $a_n$ est le coefficient du terme dominant de $P_n$.

2. Propriétés des zéros de $P_n$ :
   (a) ils sont dans $\overset{\circ}{\Omega}$ ;
   (b) ils sont simples ;
   (c) entrelacement des zéros de $P_n$ et de $P_{n+1}$.

# Références

[1] C. Brezinski, *Padé-type Approximations and General Orthogonal Polynomials*, volume 50 of ISNM, Birkhaüser-Verlag, Basel, 1980.

[2] J. Van Iseghem, *Polynômes orthogonaux ; Synthèse des présentations de polynômes orthogonaux classiques ; Extensions*, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique et Optimisation de l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois, 1988.