Quadrature

Denis Vekemans *

Les notations utilisées sont celles de la leçon sur l'interpolation.

Le but est d'obtenir une valeur numérique approchée de l'intégrale définie

$$I = \int_a^b f(x)\omega(x)dx$$

où $a < b$ et ω est une fonction donnée qui ne s'annule pas sur $]a, b[$ et qui est intégrable sur $[a, b]$.

Les méthodes du type interpolation.

Dans ces méthodes, l'idée est d'approcher la fonction f par son polynôme d'interpolation P_n en les points d'abscisses x_0, x_1, ..., x_n.

On a $f = P_n + E_n$.

D'où

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \int_a^b P_n(x)\omega(x)dx + \int_a^b E_n(x)\omega(x)dx.$$

En utilisant la formule d'interpolation de Lagrange, il vient

$$I = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\int_a^b L_i^{(n)}(x)\omega(x)dx}_{=A_i^{(n)}} f(x_i) + \int_a^b E_n(x)\omega(x)dx.$$

On prendra $\sum_{i=0}^n A_i^{(n)} f(x_i)$ comme approximation de I et $R_n(f) = \int_a^b E_n(x)\omega(x)dx$ comme erreur de quadrature.

Etude de la stabilité et de la convergence de quadrature.

La méthode de quadrature est stable si

$$\forall(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \exists M \text{ indépendante de } n, \text{ telle que } |\sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)}\varepsilon_i| \leq M \max_i |\varepsilon_i|.$$

La méthode de quadrature est convergente si

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f) = 0.$$

Théorème 1

1. *S'il existe M indépendant de n tel que*

$$\sum_{i=0}^{n} |A_i^{(n)}| \leq M,$$

alors la méthode de quadrature est stable.

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

2. *Si la méthode de quadrature est convergente sur l'espace des polynômes et s'il existe M indépendant de n tel que*
$$\sum_{i=0}^{n} |A_i^{(n)}| \leq M,$$
alors la méthode de quadrature est convergente.

Démonstration

1. On a
$$|\sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)}\varepsilon_i| \leq \underbrace{\sum_{i=0}^{n} |A_i^{(n)}|}_{\leq M} \max_i |\varepsilon_i|, \ \forall n \in \mathbb{N},$$
et par conséquent, la méthode est stable.

2. On a
$$I = \int_a^b f(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} f(x_i) + R_n(f), \ \forall n \in \mathbb{N},$$
et
$$\int_a^b p_n(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} p_n(x_i) + \underbrace{R_n(p_n)}_{\longrightarrow 0},$$
où $p_n \in \mathcal{P}_n$.

   Par différence, on déduit
$$\int_a^b (f(x) - p_n(x))\,\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} (f(x_i) - p_n(x_i)) + R_n(f) - R_n(p_n).$$

   Le théorème de Weierstrass nous dit qu'il existe une suite de polynômes (p_n) telle que $p_n \xrightarrow{u} f$.

   Dès lors, on a
$$\sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} (f(x_i) - p_n(x_i)) \longrightarrow 0$$
car
$$\underbrace{|\sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} (f(x_i) - p_n(x_i))|}_{\underbrace{\sum_{i=0}^{n} |A_i^{(n)}|}_{\leq M} \max_i |f(x_i) - p_n(x_i)|} \longrightarrow 0$$
et
$$\underbrace{\int_a^b (f(x) - p_n(x))\,\omega(x)dx}_{\leq ||f-p_n||_\infty \int_a^b \omega(x)dx} \longrightarrow 0,$$
puis
$$R_n(f) \longrightarrow 0.$$

■

$\boxed{\text{Formules de Newton-Côtes.}}$

Il s'agit du cas où les abscisses d'interpolation sont équidistantes :

$$x_i = a + i\underbrace{\frac{b-a}{n}}_{=h}, \ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

De plus, on choisit $\omega(x) = 1, \ \forall x \in [a, b]$.

On a vu que

$$P_n(x) = v_n(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x - x_i)v_n'(x_i)},$$

avec

$$v_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j).$$

Ainsi,

$$A_i^{(n)} = \int_a^b \frac{v_n(x)}{(x - x_i)v_n'(x_i)} dx.$$

On pose le changement de variable $y = \frac{x-a}{h}$.

On calcule

$$v_n'(x_i) = \prod_{j=0 \text{ et } j\neq i}^{n} (x_i - x_j) = h^n \prod_{j=0 \text{ et } j\neq i}^{n} (i - j) = h^n(-1)^{n-i} i!(n - i)!$$

et

$$\frac{v_n(x)}{x - x_i} = h^n \prod_{j=0 \text{ et } j\neq i}^{n} (y - j).$$

Puis,

$$A_i^{(n)} = \frac{b-a}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{j=0 \text{ et } j\neq i}^{n} (y - j)dy.$$

Remarques :

1. Pour $n = 1$, $A_0^{(1)} = A_1^{(1)} = \frac{b-a}{2}$, et $I = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) + R_1(f)$.
2. Pour $n = 2$, $A_0^{(2)} = A_2^{(1)} = \frac{b-a}{6}$, $A_1^{(2)} = 4\frac{b-a}{6}$, et $I = \frac{b-a}{6}\big(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\big) + R_2(f)$.

<u>Etude de l'erreur de quadrature de Newton-Côtes.</u>

On a vu que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$, alors

$$E_n(x) = \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}_{=v_n(x)} \lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_n\rfloor_f = \frac{v_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta_x),$$

avec $\zeta_x \in [a, b]$.

On déduit l'expression de l'erreur de quadrature

$$R_n(f) = \int_a^b \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}_{=v_n(x)} \lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_n\rfloor_f \, dx = \int_a^b \frac{v_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta_x)dx,$$

avec $\zeta_x \in [a, b]$.

Lemme 2
Si $f \in \mathcal{C}^{n+2}([a,b])$*, alors*

$$\frac{d}{dx}\lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_n\rfloor_f = \frac{f^{(n+2)}(\zeta_x)}{(n+2)!},$$

où $\zeta_x \in [a,b]$*.*

Démonstration

On a vu que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, alors

$$\lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_n\rfloor_f = \frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!},$$

avec $\eta_x \in [a,b]$.

D'où

$$\lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_n, x+h\rfloor_f = \frac{f^{(n+2)}(\zeta_x)}{(n+2)!},$$

avec $\zeta_x \in [a,b]$.

Et, par définition des différences divisées,

$$\lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_n, x+h\rfloor_f = \frac{\lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_n\rfloor_f - \overbrace{\lceil x_0, x_1, \ldots, x_n, x+h\rfloor_f}^{=\lceil x+h, x_0, x_1, \ldots, x_n\rfloor_f}}{\underbrace{(x+h)-x}_{=h}}.$$

Et, en faisant tendre h vers 0,

$$\frac{d}{dx}\lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_n\rfloor_f = \frac{f^{(n+2)}(\zeta_x)}{(n+2)!},$$

où $\zeta_x \in [a,b]$.

■

On donne la fonction V_n par

$$V_n(x) = \int_a^x v_n(t)dt.$$

Lemme 3
Pour n *pair, on a* $V_n(a) = V_n(b) = 0$ *et* $V_n(x) > 0,\ \forall x \in [a,b]$*.*

Démonstration

Puisque n est pair, v_n est antisymétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$ (i.e. $v_n(\frac{a+b}{2}+x) = -v_n(\frac{a+b}{2}-x)$).

Il s'ensuit $V_n(a) = V_n(b) = 0$.

Toujours suite à l'antisymétrie, il ne reste plus qu'à montrer que $V_n(x) > 0,\ \forall x \in [a, \frac{a+b}{2}]$.

A l'aide du changement de variable $t = a + uh$,

$$V_n(x) = h^{n+2}\int_0^{\frac{x-a}{h}} u(u-1)\ldots(u-n)du.$$

- Pour $u \in]0,1[$, on a $u(u-1)\dots(u-n) > 0$ et donc $V_n(x) > 0$ pour $x \in [a, x_1]$.
- Pour $u \in]1,2[$, on a $u(u-1)\dots(u-n) < 0$ et donc $V_n(x) > V_n(x_2)$ pour $x \in [x_1, x_2]$.

  Or

$$\begin{aligned}
& V_n(x_2) \\
= \ & h^{n+2}\int_0^2 u(u-1)\dots(u-n)du \\
= \ & h^{n+2}\left(\int_0^1 u(u-1)\dots(u-n)du + \underbrace{\int_1^2 v(v-1)\dots(v-n)dv}_{=\int_0^1 (u+1)u\dots(u+1-n)du \text{ avec } u=v-1}\right) \\
= \ & h^{n+2}\left(\int_0^1 (2u-n+1)u\dots(u+1-n)du\right).
\end{aligned}$$

  Mais, pour $u \in]0,1[$, on a $(2u-n+1)u(u-1)\dots(u+1-n) > 0$ et donc $V_n(x) > V_n(x_2) > 0$ pour $x \in [x_1, x_2]$.
- On suppose que $V_n(x) > 0$ pour $x \in [x_{2m}, x_{2m+1}]$ et que $V_n(x) > 0$ pour $x \in [x_{2m+1}, x_{2m+2}]$ et on veut montrer que $V_n(x) > 0$ pour $x \in [x_{2m+2}, x_{2m+3}]$ et que $V_n(x) > 0$ pour $x \in [x_{2m+3}, x_{2m+4}]$ lorsque $2m+4 \leq \frac{n}{2}$.
  - Pour $u \in]2m+2, 2m+3[$, on a $u(u-1)\dots(u-n) > 0$ et donc $V_n(x) - V_n(x_{2m+2}) > 0$ pour $x \in [x_{2m+2}, x_{2m+3}]$, puis $V_n(x) > 0$ pour $x \in [x_{2m+2}, x_{2m+3}]$.
  - Pour $u \in]2m+3, 2m+4[$, on a $u(u-1)\dots(u-n) < 0$ et donc $V_n(x) > V_n(x_{2m+4})$ pour $x \in [x_{2m+3}, x_{2m+4}]$.

    Or

$$\begin{aligned}
& V_n(x_{2m+4}) \\
= \ & h^{n+2}\int_0^{2m+4} u(u-1)\dots(u-n)du \\
= \ & h^{n+2}\left(\int_0^{2m+2} u(u-1)\dots(u-n)du\right) \\
& +h^{n+2}\left(\int_{2m+2}^{2m+3} u(u-1)\dots(u-n)du + \underbrace{\int_{2m+3}^{2m+4} v(v-1)\dots(v-n)dv}_{=\int_{2m+2}^{2m+3} (u+1)u\dots(u+1-n)du \text{ avec } u=v-1}\right) \\
= \ & V_n(x_{2m+2}) + h^{n+2}\left(\int_{2m+2}^{2m+3} (2u-n+1)u\dots(u+1-n)du\right).
\end{aligned}$$

    Mais, pour $u \in]2m+2, 2m+3[$, on a $(2u-n+1)u(u-1)\dots(u+1-n) > 0$ et donc $V_n(x) > V_n(x_{2m+4}) > 0$ pour $x \in [x_{2m+3}, x_{2m+4}]$.

■

Théorème 4

Si $f \in \mathcal{C}^{n+2}([a,b])$, alors l'erreur de la formule de quadrature de Newton-Côtes pour n pair est

$$R_n(f) = \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\zeta) \int_0^n t^2(t-1)(t-2)\dots(t-n)dt,$$

où $\zeta \in [a,b]$.

Démonstration

On a

$$R_n(f) = \int_a^b v_n(x) \lceil x, x_0, x_1, \dots, x_n \rfloor_f \, dx.$$

Une intégration par parties donne

$$R_n(f) = \underbrace{\Big[V_n(x) \lceil x, x_0, x_1, \dots, x_n \rfloor_f\Big]_a^b}_{=0,\text{ d'après le lemme 3.}} - \int_a^b V_n(x) \underbrace{\frac{d}{dx} \lceil x, x_0, x_1, \dots, x_n \rfloor_f}_{=\frac{f^{(n+2)}(\zeta_x)}{(n+2)!} \text{ où } \zeta_x \in [a,b],\text{ d'après le lemme 2.}} dx.$$

Puis,

$$R_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\zeta)}{(n+2)!} \int_a^b V_n(x)dx,$$

où $\zeta \in [a,b]$, d'après le théorème de la moyenne.

Une intégration par parties donne

$$\int_a^b V_n(x)dx = \underbrace{[(x-a)V_n(x)]_a^b}_{=0,\text{ d'après le lemme 3.}} - \int_a^b (x-a)v_n(x)dx.$$

En posant le changement de variable $x = a + uh$, on déduit

$$\int_a^b xv_n(x)dx = h^{n+2} \int_0^n (uh)u(u-1)\dots(u-n)dx = h^{n+3} \int_0^n u^2(u-1)\dots(u-n)dx.$$

Et, enfin,

$$R_n(f) = \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\zeta) \int_0^n t^2(t-1)(t-2)\dots(t-n)dt,$$

où $\zeta \in [a,b]$.

$\blacksquare$

Théorème 5

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, alors l'erreur de la formule de quadrature de Newton-Côtes pour n impair est

$$R_n(f) = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta) \int_0^n t(t-1)(t-2)\dots(t-n)dt,$$

où $\zeta \in [a,b]$.

Démonstration

On a

$$R_n(f) = \int_a^b v_n(x) \lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_n \rfloor_f \, dx = \int_a^{b-h} v_n(x) \lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_n \rfloor_f \, dx + \int_{b-h}^b v_n(x) \lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_n \rfloor_f \, dx.$$

$v_n(x) < 0$ sur $[b-h, b]$ et donc ne change pas de signe sur $[b-h, b]$. Donc,

$$\int_{b-h}^b v_n(x) \lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_n \rfloor_f \, dx = \frac{f^{(n+1)}(\zeta_1)}{(n+1)!} \int_{b-h}^b v_n(x) dx,$$

avec $\zeta_1 \in [b-h, b]$.

D'autre part,

$$\int_a^{b-h} \underbrace{v_n(x)}_{=(x-b)\ \underbrace{v_{n-1}(x)}_{=\frac{d}{dx}V_{n-1}(x)}} \underbrace{\lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_n \rfloor_f}_{=\frac{\lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \rfloor_f - \lceil x_0, x_1, \ldots, x_n \rfloor_f}{x-b}} \, dx$$

$$= \int_a^{b-h} \frac{d}{dx} V_{n-1}(x) \lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \rfloor_f \, dx - \underbrace{\int_a^{b-h} \frac{d}{dx} V_{n-1}(x) \lceil x_0, x_1, \ldots, x_n \rfloor_f \, dx}_{=0,\ \text{d'après le lemme 3.}}$$

Et, une intégration par parties donne

$$\int_a^{b-h} \frac{d}{dx} V_{n-1}(x) \lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \rfloor_f \, dx$$

$$= \underbrace{\Big[V_{n-1}(x) \lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \rfloor_f \Big]_a^{b-h}}_{=0,\ \text{d'après le lemme 3.}} - \int_a^{b-h} V_{n-1}(x) \frac{d}{dx} \lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \rfloor_f \, dx.$$

Puis, d'après le théorème de la moyenne,

$$\int_a^{b-h} V_{n-1}(x) \frac{d}{dx} \lceil x, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \rfloor_f \, dx = \frac{f^{(n+1)}(\zeta_2)}{(n+1)!} \int_a^{b-h} V_{n-1}(x) dx,$$

avec $\zeta_2 \in [a, b-h]$.

Par conséquent, on a

$$R_n(f) = \frac{1}{(n+1)!} \left(f^{(n+1)}(\zeta_1) \underbrace{\int_{b-h}^b v_n(x) dx}_{\leq 0} - f^{(n+1)}(\zeta_2) \underbrace{\int_a^{b-h} V_{n-1}(x) dx}_{>0,\ \text{d'après le lemme 3.}} \right).$$

Mais, puisque $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, $f^{(n+1)} \in \mathcal{C}^0([a,b])$, et lorsque μ et ν sont des réels positifs, $\mu f^{(n+1)}(\zeta_1) + \nu f^{(n+1)}(\zeta_2) = (\mu+\nu) f^{(n+1)}(\zeta)$ où $\zeta \in [\zeta_1, \zeta_2] \subset [a, b]$.

Or, avec $\mu = -\int_{b-h}^b v_n(x) dx$ et $\nu = \int_a^{b-h} V_{n-1}(x) dx$. Et, par intégration par parties, on a

$$\int_a^{b-h} v_n(x) dx = \underbrace{\left[(x-b) V_{n-1}(x) \right]_a^{b-h}}_{=0,\ \text{d'après le lemme 3.}} - \int_a^{b-h} V_{n-1}(x) dx.$$

Puis, $\mu+\nu=-\int_a^b v_n(x)dx$.

Enfin, en utilisant le changement de variable $x=a+th$,

$$R_n(f)=\frac{h^{n+2}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\zeta)\int_0^n t(t-1)(t-2)\dots(t-n)dt,$$

où $\zeta\in[a,b]$.

■

Etude de la stabilité et de la convergence de quadrature de Newton-Côtes.

La méthode de quadrature de Newton-Côtes n'est ni stable, ni convergente. En fait, la quantité $\sum_{i=0}^n |A_i^{(n)}|$ n'est pas bornée supérieurement pour tout n. [Ce résultat n'est pas démontré ici].

$\boxed{\text{Les méthodes composites}}$

Dans ces mèthodes, l'idée est d'écrire

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_{a=\alpha_0}^{\alpha_1} f(x)dx+\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx+\ldots+\int_{\alpha_{N-1}}^{\alpha_N=b} f(x)dx,$$

puis utiliser une méthode de Newton-Côtes sur chaque subdivision $[\alpha_i,\alpha_{i+1}]$, avec $i\in\{0,1,\ldots,N-1\}$.

La méthode des trapèzes.

$h=\frac{b-a}{N}$.

On a

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)dx=\frac{h}{2}\left(f(\alpha_i)+f(\alpha_{i+1})\right)+\underbrace{\frac{h^3}{2}f''(\zeta_i)\underbrace{\int_0^1 t(t-1)dt}_{=\frac{-1}{6}}}_{=-\frac{h^3}{12}f''(\zeta_i)},$$

où $\zeta_i\in[\alpha_i,\alpha_{i+1}]$.

On obtient donc

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{N-1}\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)dx=\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left(f(\alpha_i)+f(\alpha_{i+1})\right)-\underbrace{\frac{h^3}{12}\underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} f''(\zeta_i)}_{=Nf''(\zeta)}}_{\frac{(b-a)^3}{12N^2}f''(\zeta)},$$

où $\zeta\in[a,b]$.

La méthode des trapèzes est stable et car $\sum_{i=0}^N A_i^{(N)}=b-a$.

Si $f\in\mathcal{C}^2([a,b])$, la méthode des trapèzes est convergente.

La méthode de Simpson.

$h=\frac{b-a}{2N}$.

On a

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)dx=\frac{b-a}{6N}\left(f(\alpha_i)+4f(\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}}{2})+f(\alpha_{i+1})\right)+\underbrace{\frac{h^5}{24}f''''(\zeta_i)\underbrace{\int_0^2 t^2(t-1)(t-2)dt}_{=\frac{-4}{15}}}_{=-\frac{h^5}{90}f''''(\zeta_i)},$$

où $\zeta_i \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$.

On obtient donc

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)dx = \frac{b-a}{6N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(f(\alpha_i) + 4f(\frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}) + f(\alpha_{i+1}) \right) - \underbrace{\frac{h^5}{90} \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} f''''(\zeta_i)}_{=Nf''''(\zeta)}}_{\frac{(b-a)^5}{2880N^4} f''''(\zeta)},$$

où $\zeta \in [a, b]$.

La méthode de Simpson est stable et car $\sum_{i=0}^{N} A_i^{(N)} = b - a$.

Si $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$, la méthode de Simpson est convergente.

Les méthodes de Gauss.

La méthode de quadrature de Newton-Côtes est exacte sur $\mathcal{P}_n$ mais n'est ni stable ni convergente.

On se propose maintenant de choisir les abscisses d'interpolation de façon optimale, c'est-à-dire de telle sorte que la méthode de quadrature soit exacte sur $\mathcal{P}_{2n+1}$.

On a $f = P_n + E_n$.

D'où

$$I = \int_a^b f(x)\omega(x)dx = \int_a^b P_n(x)\omega(x)dx + \int_a^b E_n(x)\omega(x)dx.$$

En utilisant la formule d'interpolation de Lagrange, il vient

$$I = \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} f(x_i) + R_n(f).$$

Théorème 6

Une condition nécessaire et suffisante pour que la formule de quadrature de Gauss soit exacte sur $\mathcal{P}_{2n+1}$ est que

$$\int_a^b x^p v_n(x)\omega(x)dx = 0,\ \forall p \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Démonstration

La condition est nécessaire ...

Si la formule de quadrature de Gauss est exacte sur $\mathcal{P}_{2n+1}$, alors

$$\int_a^b x^p v_n(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} x_i^p v_n(x_i),\ \forall p \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Et, $v_n(x_i) = 0$, par définition de v_n.

La condition est suffisante ...

Si

$$\int_a^b x^p v_n(x)\omega(x)dx = 0,\ \forall p \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

alors, par combinaison linéaire, on obtient

$$\int_a^b Q(x)v_n(x)\omega(x)dx = 0,$$

pour tout $Q \in \mathcal{P}_n$.

Soit $P \in \mathcal{P}_{2n+1}$, la division euclidienne de P par v_n donne $P = v_n Q + R$ où $R \in \mathcal{P}_n$.

Ainsi,

$$\int_a^b P(x)\omega(x)dx = \underbrace{\int_a^b Q(x)v_n(x)\omega(x)dx}_{=0} + \underbrace{\int_a^b R(x)\omega(x)dx}_{=\sum_{i=0}^n A_i^{(n)} \underbrace{R(x_i)}_{=P(x_i)} \text{ car la formule de quadrature est exacte sur } \mathcal{P}_n}.$$

■

Théorème 7

La formule de quadrature de Gauss ne peut être exacte sur $\mathcal{P}_{2n+2}$.

Démonstration

Soit à calculer

$$I = \int_a^b (v_n(x))^2\omega(x)dx.$$

Puisque $v_n^2 > 0$ et $\omega > 0$, on a $I > 0$.

Cependant,

$$\sum_{i=0}^n A_i^{(n)}(v_n(x_i))^2 = 0,$$

par définition de v_n.

Et, la formule ne peut être exacte sur $\mathcal{P}_{2n+2}$.

■

La question qui se pose maintenant est de savoir s'il existe un polynôme v_n satisfaisant aux conditions du théorème 6 ...

Théorème 8

Pour les méthodes de Gauss, les abscisses x_i sont réelles, distinctes, situées dans $[a, b]$ et uniques.

Démonstration

On rappelle que

$$\int_a^b Q(x)v_n(x)\omega(x)dx = 0,$$

pour tout $Q \in \mathcal{P}_n$.

Les racines de v_n sont dans $[a, b]$ ...

Supposons que v_n ne possède que $k + 1$ racines réelles, distinctes ou non, situées dans $[a, b]$. Soient x_0, x_1, ..., x_k ces racines et supposons que $-1 \leq k \leq n$.

On peut alors écrire $v_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_k)u(x)$ avec $u \in \mathcal{P}_{n+1-k}$.

Pour $Q(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_k)$, Qv_n ne change pas de signe sur $[a, b]$ et ceci contredit le fait que $\int_a^b Q(x)v_n(x)\omega(x)dx = 0$.

Les racines de v_n sont simples ...

Supposons que v_n possède au moins une racine d'ordre de multiplicité supérieur ou égal à 2. Soit x_0 cette racine.

On peut alors écrire $v_n(x) = (x - x_0)^2 u(x)$ avec $u \in \mathcal{P}_{n-1}$.

Pour $Q(x) = u(x)$, $Qv_n \geq 0$ sur $[a, b]$ et ceci contredit le fait que $\int_a^b Q(x)v_n(x)\omega(x)dx = 0$.

Les racines de v_n sont uniques ...

Soit $v_n(x) = (x - x_0^{(v)})(x - x_1^{(v)}) \ldots (x - x_n^{(v)})$ tel que

$$\int_a^b Q(x)v_n(x)\omega(x)dx = 0,$$

pour tout $Q \in \mathcal{P}_n$.

Soit $w_n(x) = (x - x_0^{(w)})(x - x_1^{(w)}) \ldots (x - x_n^{(w)})$ tel que

$$\int_a^b Q(x)w_n(x)\omega(x)dx = 0,$$

pour tout $Q \in \mathcal{P}_n$.

Et supposons v_n et w_n distincts.

Alors,

$$\int_a^b Q(x)(v_n(x) - \lambda w_n(x))\omega(x)dx = 0,$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $Q \in \mathcal{P}_n$.

Soit $\xi \notin [a, b]$. On peut choisir λ pour que ξ soit racine de $v_n - \lambda w_n$. De plus, à condition de bien choisir ξ, on peut même choisir $\lambda \neq 1$ puisque $v_n \neq w_n$. Cependant, on a vu que les racines de $v_n - \lambda w_n$ sont dans $[a, b]$, ce qui contredit le fait que $v_n - \lambda w_n$ soit de degré n alors qu'il est évident que si $\lambda \neq 1$, $v_n - \lambda w_n$ est de degré n.

■

Théorème 9

La méthode de quadrature de Gauss est stable et convergente.

Démonstration

On utilise le théorème 1.

1. Les méthodes de Gauss sont convergentes pour tout polynôme puisqu'elles sont des méthodes de type interpolation.
2. On prend

$$L_i(x) = \prod_{j=0 \text{ et } j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

On a $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$ et $L_i(x_i) = 1$.

D'autre part, $L_i \in \mathcal{P}_{2n}$ et donc $0 < \int_a^b (L_i(x))^2\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{n} A_j^{(n)}(L_i(x_j))^2 = A_i^{(n)}$.

D'autre part, la formule de quadrature de Gauss est exacte sur P_0 et on a

$$\underbrace{\int_a^b \omega(x)dx}_{\leq M} = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{A_i^{(n)}}_{=|A_i^{(n)}|}.$$

■

Le théorème suivant donne une expression facilement utilisable pour calculer les coefficients de Gauss $A_i^{(n)}$.

Théorème 10

$$A_i^{(n)} = \frac{1}{v_n'(x_i)} \int_a^b \frac{v_n(x)}{x - x_i} \omega(x) dx.$$

Démonstration

On prend

$$p(x) = \frac{v_n(x)}{x - x_i},$$

et $p \in \mathcal{P}_n$.

Alors,

$$p(x_i) = \lim_{x \to x_i} \frac{v_n(x)}{x - x_i} = \lim_{x \to x_i} \frac{v_n(x) - v_n(x_i)}{x - x_i} = v_n'(x_i).$$

Et, la formule de Gauss est exacte sur $\mathcal{P}_{2n+1}$, d'où

$$\int_a^b \underbrace{\frac{v_n(x)}{x - x_i}}_{=p(x)} \omega(x) dx = \sum_{j=0}^{n} A_j^{(n)} \underbrace{\frac{v_n(x_j)}{x_j - x_i}}_{=p(x_j)} = A_i^{(n)} \underbrace{v_n'(x_i)}_{=p(x_i)}.$$

Et, $v_n'(x_i) \neq 0$, d'après le théorème 8.

■

Calcul effectif des coefficients de Gauss.

Pour certains choix de ω, il est possible de calculer effectivement les coefficients $A_i^{(n)}$.

Par exemple, c'est le cas lorsque $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $[-1, 1]$.

On a

$$x_i = \cos(\frac{2i+1}{2n+2}\pi),$$

pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Et,

$$A_i^{(n)} = \frac{1}{n+1}\pi,$$

pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Références

[1] C. Brezinski, *Analyse Numérique Discrète*, Publications du Laboratoire de Calcul de l'Université des Sciences et Techniques de Lille.