Séries numériques à valeurs réelles

Denis Vekemans *

Exercice 1 Soit (u_n) une suite. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda.$$

Regarder la série de terme général u_n où $u_{2p} = 2^p \frac{1}{3^p}$ et $u_{2p+1} = 2^{p+1} \frac{1}{3^p}$.

Exercice 2 Soit (u_n) une suite donnée par $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. Regarder la série de terme général u_n. Etudier la série produit de terme général w_n où $w_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k}$.

Exercice 3 Soit ϕ une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\phi(n)}{n^2}$.

Exercice 4 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| < 1$. On pose $u_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{1-2\lambda\cos x+\lambda^2} dx$. Montrer que la série de terme général u_n converge. Calculer sa somme.

Aides : Montrer d'abord que $u_{n+2} - \frac{1+\lambda^2}{\lambda} u_{n+1} + u_n = 0$. Déduire que $u_n = \frac{\pi\lambda^n}{1-\lambda^2}$.

Exercice 5 Soit ϕ une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\phi(3p) = 2p$, $\phi(3p+1) = 4p+1$ et $\phi(3p+2) = 4p+3$.

1. Montrer que ϕ est une bijection.
2. Soit $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ et $v_n = u_{\phi(n)}$. Etudier la nature de la série de terme général u_n, puis v_n.

Exercice 6 Soit a_n le terme général d'une série à termes positifs divergente et u_n le terme général d'une suite convergente de limite l.

1. On pose $v_n = \frac{\sum_{k=0}^n a_k u_k}{\sum_{k=0}^n a_k}$. Montrer que (v_n) converge vers l.
2. On pose $w_n = \frac{\sum_{k=0}^n k u_k}{n^2}$ et $t_n = \frac{\sum_{k=0}^n k^p u_k}{n^{p+1}}$ $(p \in \mathbb{N})$. Montrer que (w_n) et (t_n) convergent.

Exercice 7 Montrer que $u_n = e^n n!/n^{n+1/2}$ est le teme général d'une suite convergente.

Aide : introduire $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$.

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Exercice 8 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, positive et décroissante. On pose $u_n = f(n)$ et $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

1. Montrer que la suite $z_n = s_n - \int_1^n f(t)dt$ converge.
2. Déduire que $(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n)$ converge.
3. Déduire que $(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha})$ converge si $\alpha \in]0,1[$.

Exercice 9

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ est semi-convergente. En déduire la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$.
2. **Généralisation.** Soit f une fonction continue sur $[0, \infty[$, décroissante et telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
   (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty f(t) \sin t dt$ est convergente.
   (b) Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)dt$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_0^\infty f(t) \sin t dt$ est absolument convergente.

Exercice 10 Déterminer un entier n tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \in]10000, 10001[$$

.

Exercice 11 Soit p un entier supérieur ou égal à 2. On définit u_n par $u_n = 1/n$ si n n'est pas divisible par p et $u_n = (1-p)/n$ si n est divisible par p. Montrer que la série de terme général u_n converge. Calculer la somme de cette série.

Exercice 12 La série

$$\sum_{\text{k entier naturel non nul tel que l'écriture décimale de k ne contient pas de "5"}} \frac{1}{k}$$

est-elle convergente ?

Exercice 13 Etudier, selon la valeur de $p \in \mathbb{N}$, la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{(n+p)!}.$$

Exercice 14 Déterminer tous les polynômes p tels que

$$u_n = \sqrt[4]{n^4 + 3n^2} - \sqrt[3]{p(n)}$$

soit le terme général d'une série convergente.

Exercice 15 Etudier la série de terme général

1. $u_n = \frac{2^n}{n^2}(\sin\alpha)^{2n}$ où $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
2. $u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{(n^3)}$.

Exercice 16 Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \sum_{p \geq n} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p+1}}.$$

Exercice 17 Soit $\alpha \in]\frac{1}{2}, \infty[$. Etudier, selon la valeur de α, la nature de la série de terme général

$$u_n = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}) - \frac{\pi}{6}.$$

Exercice 18 Etudier la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + \cos n}.$$

Références

[1] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 3. Analyse II*, Belin, Collection DIA, 1987.