Séries de Fourier

Denis Vekemans *

Exercice 1 **Un théorème d'existence pour les séries de Fourier.**

Soit f la fonction (à valeurs réelles d'une variable réelle), 2π-périodique, intégrable sur tout segment, telle que pour tout x réel, $f(x_+)$ et $f(x_-)$ existent. On associe à f ses coefficients de Fourier :

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_\Delta f(t)\cos(kt)dt \ ; \ b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_\Delta f(t)\sin(kt)dt,$$

où Δ désigne un segment de longueur 2π.

On définit alors la série de Fourier de f au point x par :

$$u_0(x) = \frac{a_0(f)}{2} \ ; \ u_k(x) = a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx).$$

On note

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

On suppose que le rapport

$$\frac{(f(x+h) - f(x_+)) + ((f(x-h) - f(x_-))}{h}$$

reste borné pour h voisin de 0.

On se propose de démontrer que la série de Fourier de f converge vers

$$\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}.$$

On pose $z_n(x) = S_n(x) - \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$.

1. Montrer (lemme de Lebesgue) que si F, de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est une fonction intégrable, on a

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b F(t)\cos(\lambda t)dt = 0 = \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b F(t)\sin(\lambda t)dt.$$

   On pourra utiliser les fonctions en escalier.

2. Montrer que si F, de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est une fonction bornée sur $[a,b]$ et intégrable sur tout segment $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$, alors, elle est intégrable sur $[a,b]$. On pourra utiliser les fonctions en escalier.

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

3. Montrer que l'on a, pour tout réel Θ, $\Phi_n(\Theta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\Theta)$ où Φ_n est une fonction continue, paire et 2π-périodique, à expliciter.
4. Montrer que l'on a la formule (de Dirichlet)
$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi_n(u)[f(x+u) + f(x-u)]du.$$
5. En déduire
$$\int_0^\pi \Phi_n(u)du = \frac{\pi}{2}.$$
6. Conclure.

Exercice 2

1. Soit f la fonction (à valeurs réelles d'une variable réelle), paire et 2π-périodique telle que
$$\forall x \in [0, \pi],\ f(x) = \pi - x.$$
   (a) Développer f en série de Fourier.
   (b) Déduire du résultat la valeur de
$$\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$
2. Soit g la fonction (à valeurs réelles d'une variable réelle), impaire et 2π-périodique telle que
$$\forall x \in [0, \pi],\ g(x) = \pi - x.$$
   (a) Développer g en série de Fourier.
   (b) Comparer les convergences de f et de g sur $[0, \pi]$.

Exercice 3 Soit f la fonction (à valeurs réelles d'une variable réelle), 2π-périodique telle que
$$\forall x \in [0, 2\pi[,\ f(x) = x^2.$$

1. Développer f en série de Fourier.
2. En déduire la valeur de
$$\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2}.$$
3. En déduire la valeur de
$$\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^4}.$$

Exercice 4 Soit f la fonction (à valeurs réelles d'une variable réelle), 2π-périodique telle que
$$\forall x \in [-\pi, \pi[,\ f(x) = e^x.$$

1. Développer f en série de Fourier.
2. En déduire la valeur de
$$\sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^2+1}.$$
3. En déduire la valeur de
$$\sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^p}{p^2+1}.$$

Exercice 5 Soit f la fonction (à valeurs réelles d'une variable réelle), impaire, 2π-périodique telle que

$$\forall x \in]0,\pi[,\ f(x) = \pi/4,$$

et $f(0) = f(\pi) = 0$ (f est appelée *fonction créneau*).

1. Développer f en série de Fourier.
2. Montrer que le développement de f en série de Fourier ne converge pas uniformément sur $[-\pi,\pi]$.
3. Soit $S_n(x)$ la somme des $n+1$ premiers termes du développement de Fourier de f. En étudiant $S_n'(x)$, rechercher le premier maximum relatif de $S_n(x)$ sur $[0,\pi]$ (atteint en x_n, et noté $S_n(x_n)$). Montrer le phénomène de Gibbs : $S_n(x_n)$ ne converge pas vers $f(0_+)$ avec n.

Exercice 6 Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On se propose de démontrer le résultat suivant :

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_\alpha^\beta F(x)|\sin(\lambda x)|dx = \frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta F(x)dx.$$

1. Soit h la fonction (à valeurs réelles d'une variable réelle), telle que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = |\sin x|.$$
Développer h en série de Fourier. Montrer que le développement de h en série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$.
2. $$\forall \mu > 0,\ J(\mu) = \int_\alpha^\beta F(x)\cos(\mu x)dx.$$
Montrer qu'il existe un réel k, indépendant de μ, tel que l'on ait
$$|J(\mu)| \leq \frac{k}{\mu}.$$
3. Conclure.

Références

[1] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 3. Analyse II*, Belin, Collection DIA, 1987.