Suites et séries de fonctions

Denis Vekemans *

Exercice 1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$; $x \to e^{-nx}\sin(\lambda nx)$ et $g_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$; $x \to e^{-nx}\cos(\lambda nx)$.

Examiner la convergence simple et la convergence uniforme des suites (f_n) et (g_n) sur $\mathbb{R}^+$. Même question sur $[a, \infty[$ où $a > 0$.

Exercice 2 Soit y_n la solution de l'équation différentielle

$$(n+1)y'' - 2(n+\frac{1}{2})y' + ny = 0$$

où $y_n(0) = 0$ et $y_n'(0) = 1$.

1. Expliciter y_n. Montrer que (y_n) converge.
2. (a) Montrer que $u \leq 0 \Longrightarrow 0 \leq e^u - 1 - u \leq \frac{u^2}{2}$.

   (b) Déduire que (y_n) converge uniformément sur $[0, \omega]$ où $\omega > 0$.

Exercice 3 Soit

$$f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \to \begin{cases} (1-\frac{x}{n})^n \text{ si } x \in [0,n] \\ 0 \text{ si } x > n \end{cases} \end{array}$$

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de (f_n).

Exercice 4 **Théorème de Weierstrass**. f est supposée continue sur $[0, 1]$. On pose $E_k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$.

1. Calculer $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} E_k(x)}_{=1}$, $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} kE_k(x)}_{=nx}$, $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k^2E_k(x)}_{=n(n-1)x^2+nx}$ et $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2E_k(x)}_{=nx(1-x)}$.
2. $\alpha > 0$; $I_n = \{0, 1, \ldots, n\}$. On définit, pour $x \in [0, 1]$, $K_n = \left\{k \in \mathbb{N}, |\frac{k}{n} - x| \geq \alpha\right\}$ et $K_n' = I_n \backslash K_n$. Montrer que $\forall x \in [0, 1]$, $\sum_{k\in K_n} E_k(x) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, B_n : f \to B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})E_k$. Montrer que $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

4. Soit g continue sur $[0,1]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 g(x)x^n dx = 0$. Montrer que $g \equiv 0$ sur $[0,1]$.

Exercice 5 Soit

$$f_n : \begin{array}{l} [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R} \\ x \to n(\cos x)^n \sin x. \end{array}$$

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n).

Comparer $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

Exercice 6 Soient ϕ_n des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ telles que la suite (ϕ_n) converge simplement vers ϕ sur $[0,1]$. Soient f_n des fonctions définies sur $[0,1]$ telles que

$$\begin{cases} f_n(t) = \phi_n(t)(\sin \frac{\pi}{t})^2 \text{ si } t \in [\frac{1}{n}, 1] \\ f_n(t) = 0 \text{ si } t \in [0, \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement. Déterminer $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en fonction de ϕ.
2.
$$\phi_n(t) = \frac{2nt^2}{2nt+1}.$$
   (a) Déterminer ϕ et f. Sont-elles continues sur $[0,1]$?
   (b) Déterminer $\sup_{t\in[\frac{1}{n},1]} |\phi_n(t) - t|$.
   (c) Montrer que $|f(t)| \leq \frac{1}{n}$ si $t \in [0, \frac{1}{n}]$.
   (d) Déduire que (f_n) converge uniformément vers f.
3.
$$\phi_n(t) = \frac{n}{n(t+1)+1}.$$
   (a) Déterminer ϕ. La suite (ϕ_n) converge-t-elle uniformément vers ϕ ?
   (b) f est-elle continue sur $[0,1]$?
   (c) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $[0,1]$?
4. Si (ϕ_n) converge uniformément vers ϕ et si $\phi(0) = 0$, la suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f ?

Exercice 7 Soient g_n des fonctions réelles définies sur $[0,1]$, par $g_0(x) = 1$, et, pour tout n entier naturel non nul, $g_n(x) = 1 + \int_0^x g_{n-1}(t-t^2)dt$.

1. Montrer que chaque g_n est un polynôme et que pour tout n, il existe un réel k_n tel que
$$\forall x \in [0,1], g_n(x) + g_n(1-x) = k_n.$$
2. Vérifier
$$\forall x \in [0,1], 0 \leq g_n(x) - g_{n-1}(x) \leq \frac{x^n}{n!}.$$
Déduire que la suite (g_n) converge uniformément vers g, que g est dérivable et qu'elle vérifie
$$\forall x \in [0,1], g'(x) = g(x-x^2).$$

Exercice 8 Montrer que la relation

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \arccos(\cos(nx))$$

définit une fonction f continue sur $\mathbb{R}$, paire, 2π-périodique. Calculer $f(\pi)$, $f(0)$ et $f(\frac{\pi}{2})$.

Exercice 9 Etablir

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} = \int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t} dt.$$

Aide : on pourra commencer par montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln^2 t}{1-t} dt.$$

Exercice 10 Déterminer les ensembles de définition de f et g.

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1} \ ;$$

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}.$$

Montrer que f est continue et que g est continûment dérivable.

Exercice 11 Montrer que la relation

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1+x}}$$

définit une fonction f sur une partie Δ de $\mathbb{R}$ que l'on précisera. Montrer que f est de classe C^∞ sur Δ.

Exercice 12 Montrer que la relation

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 + n^4 x^2}$$

définit une fonction f continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Etudier directement la dérivabilité en 0 et représenter graphiquement f.

Références

[1] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 3. Analyse II*, Belin, Collection DIA, 1987.