Suites et séries de fonctions – Corrections –

Denis Vekemans *

Correction de l'exercice 4

1. (a) $\sum_{k=0}^{n} E_k(x) = 1$ (trivial par la formule du binôme de Newton).
   (b) $\sum_{k=0}^{n} kE_k(x) = nx$ (trivial en utilisant $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$).
   (c) $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)E_k(x) = n(n-1)x^2$ (trivial en utilisant $C_n^k = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} C_{n-2}^{k-2}$).
   (d) $\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 E_k(x) = nx(1-x)$ (en développant $(k-nx)^2$ par rapport à k dans la base des $\{1, k, k(k-1)\}$).

2.
$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 E_k(x) = n \underbrace{x(1-x)}_{\leq \frac{1}{4}} \geq \sum_{k \in K_n} (\underbrace{k-nx}_{\geq n\alpha})^2 E_k(x)$$
$$\geq n^2 \alpha^2 \sum_{k \in K_n} E_k(x).$$

   D'où
$$\sum_{k \in K_n} E_k(x) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

3. f est continue sur $[0,1]$ donc uniformément continue sur $[0,1]$. Soit $M = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$.
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall a \in [0,1],\ \forall b \in [0,1], |a-b| < \alpha \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon.$$
$$f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k \in I_n} \left(f(x) - f(\frac{k}{n}) \right) E_k(x).$$

   Puis,
$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \underbrace{\sum_{k \in K_n} \left| f(x) - f(\frac{k}{n}) \right| E_k(x)}_{\leq 2M \frac{1}{4n\alpha^2}} + \underbrace{\sum_{k \in K_n'} \left| f(x) - f(\frac{k}{n}) \right| E_k(x)}_{< \varepsilon}.$$

   Donc,
$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - B_n(f)(x)| \leq M \frac{1}{2n\alpha^2} + \varepsilon.$$

   Puis,
$$B_n(f) \xrightarrow{u} f.$$

   Ceci finit la démonstration du théorème de Weierstrass : pour toute fonction continue f sur $[0,1]$, il existe une suite de fonctions polynômes qui converge uniformément vers f.

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

4. Une application du théorème de Weierstrass.

   $\forall p \in \mathcal{P}_n,\ \int_0^1 g(x)p(x)dx$, par linéarité.

   De plus, d'après le théorème de Weierstrass, $\exists p_n \in \mathcal{P}_n$ tel que $p_n \xrightarrow{u} g$.

   Donc,

$$\int_0^1 (g(x))^2 dx = \underbrace{\int_0^1 g(x)(g(x)-p_n(x))dx}_{\leq \varepsilon \max_{x\in[0,1]} |g(x)|} + \underbrace{\int_0^1 g(x)p_n(x)dx}_{=0}.$$

   Puis,

$$\int_0^1 (g(x))^2 dx = 0,$$

   et, comme g est continue, $g = 0$.

Correction de l'exercice 10

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$$

et

$$v_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}.$$

- Si $x < 0$, (u_n) et (v_n) ne convergent pas vers 0 et les séries divergent.
- Si $x \geq 0$, la série de terme général u_n est alternée et convergente.
- Si $x \geq 0$, la série de terme général v_n est alternée et convergente.

Analyse :

- Pour la série de terme général $u_n(x)$, on note $R_n(x) = \sum_{k>n} u_k(x)$. On a alors, $|R_n(x)| \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{n+2}$, par le critère des séries alternées. Puis, $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+2}$ qui converge vers 0. Par conséquent, la série de terme général $u_n(x)$ converge uniformément et f est continue.
- Pour la série de terme général $v_n(x)$, on note $R_n(x) = \sum_{k>n} v_k(x)$. On a alors, $|R_n(x)| \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{(n+1)^2+1}$, par le critère des séries alternées. Puis, $|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^2+1}$ qui converge vers 0. Par conséquent, la série de terme général $v_n(x)$ converge uniformément et g est continue.
- $v_n(x) \in C^1(\mathbb{R}^+)$ et $v_n'(x) = (-1)^{n+1}\frac{ne^{-nx}}{n^2+1}$.
- Pour la série de terme général $v_n'(x)$, on note $R_n(x) = \sum_{k>n} v_k'(x)$. On a alors, $|R_n(x)| \leq \frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{(n+1)^2+1}$, par le critère des séries alternées. Puis, $|R_n(x)| \leq \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$ qui converge vers 0. Par conséquent, la série de terme général $v_n'(x)$ converge uniformément et $g \in C^1(\mathbb{R}^+)$.

Remarquons que $u_n'(x) = (-1)^{n+1}\frac{ne^{-nx}}{n+1}$ et $u_n'(0)$ est le terme général d'une série divergente.

Correction de l'exercice 11

$$u_n(x) = \frac{1}{n^{1+x}}.$$

La série de terme général $u_n(x)$ converge si et seulement si $x > 0$, d'après le critère de Riemann.

L'ensemble de définition est donc $\mathbb{R}^{+*}$.

– Soit $a > 0$, $\forall x \in \Delta_a = [a, \infty[$, $0 \leq \frac{1}{n^{1+x}} \leq \frac{1}{n^{1+a}}$. Par conséquent, la série de terme général $u_n(x)$ converge normalement puis uniformément sur Δ_a (critère de Riemann). Puis, f est continue sur Δ_a, pour tout a, et donc sur $\mathbb{R}^{+*}$.

– $u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k (\ln n)^k}{n^{1+x}}$ (par récurrence sur k).
Soit $a > 0$, $\forall x \in \Delta_a$, $0 \leq \frac{(-1)^k (\ln n)^k}{n^{1+x}} \leq \frac{(\ln n)^k}{n^{1+a}}$. Par conséquent, la série de terme général $u_n^{(k)}(x)$ converge normalement puis uniformément sur Δ_a (critère de Bertrand). Puis, f est de classe C^k sur Δ_a, pour tout a, et donc sur $\mathbb{R}^{+*}$.

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Références

[1] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 3. Analyse II*, Belin, Collection DIA, 1987.