Suites numériques à valeurs réelles

Denis Vekemans *

Exercice 15 Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$.

Solution 15 Une étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}(4 - x^2)$ montre que

1. f est croissante sur $] - \infty, 0]$;
2. f est décroissante sur $[0, \infty[$;
3. les points fixes de f sont -4 et 1 ;
4. $\forall x \in]-\infty, -4[, \ f(x) < x$;
5. $\forall x \in]-4, 1[, \ f(x) > x$;
6. $\forall x \in]1, \infty[, \ f(x) < x$.

Disjonction des cas selon les valeurs de u_0.

Cas 1 Si $u_0 \in \{-4, 1\}$, la suite est constante.

Cas 2 Si $u_0 \in [0, 2]$, alors $(u_n) \in [0, 2]^{\mathbb{N}}$ car l'intervalle $[0, 2]$ est stable par f. f est décroissante sur $[0, 2]$ et par conséquent les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont de monotonies opposées. Comme, de plus, elles sont bornées (minorées par 0 et majorées par 2), ces suites sont convergentes. Or, le seul point fixe de f adhérent à $[0, 2]$ est 1, donc elles convergent vers 1. En consquence, la suite (u_n) converge vers 1.

Cas 3 Si $u_0 \in] - 4, 0[$. On a $f(] - 4, 0[) =] - 4, \frac{4}{3}[$.

Par l'absurde, on suppose que $(u_n) \in] - 4, 0[^{\mathbb{N}}$. Comme f est croissante sur $] - 4, 0[$, (u_n) est monotone, et comme $\forall x \in]-4, 0[, \ f(x) > x$, on conclut que la suite (u_n) est croissante. Dans ce cas, la suite (u_n) est convergente car majorée par 0. Or, le seul point fixe de f adhérent à $] - 4, 0[$ est -4, donc elle converge vers -4. Ceci est absurde car une suite croissante à partir de $u_0 > -4$ ne peut converger vers -4.

Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [0, \frac{4}{3}[$ et on est ramené au cas 2.

Cas 4 Si $u_0 \in] - \infty, -4[$, alors $(u_n) \in] - \infty, -4[^{\mathbb{N}}$ car l'intervalle $] - \infty, -4[$ est stable par f. f est croissante sur $] - \infty, -4[$ et par conséquent la suite (u_n) est monotone. Comme $\forall x \in]-\infty, -4[, \ f(x) < x$, il suit que la suite (u_n) est décroissante. Or, le seul point fixe de f adhérent à $] - \infty, -4[$ est -4, et comme elle ne peut converger vers -4 car elle est décroissante à partir de $u_0 < -4$, on déduit qu'elle diverge vers $-\infty$.

Cas 5 Si $u_0 \in]2, \infty[$, on a $u_1 \in] - \infty, 0[$ et on est ramené à l'un des cas 1, 3 ou 4.

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France