

EXAMEN – ALGÈBRE

Université du Littoral Côte d'Opale

Mardi 19 mai 2009, 9h-12h

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (incluant le téléphone portable, la calculatrice, ...) est rigoureusement interdit.

Exercice 1 (NB : Les trois questions sont indépendantes)

1. Soit G un ensemble muni de deux lois de composition internes $*$ et T .

a- Quelles propriétés doivent être vérifiées par $*$ pour que $(G, *)$ soit un groupe ?

b- Quelles relations doivent être vérifiées pour que T soit distributive par rapport à $*$?

2. Soient $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension m , F une partie de E et $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ une famille de vecteurs de E .

a- Quelles propriétés doivent être vérifiées pour que F soit un sous espace vectoriel de E ?

b- On suppose que $\text{rang}(\mathcal{B}) = n = m$, la famille \mathcal{B} est-elle libre ?, la famille \mathcal{B} est-elle génératrice ?, la famille \mathcal{B} est-elle une base ?

c- On suppose que $\text{rang}(\mathcal{B}) = n < m$, la famille \mathcal{B} est-elle libre ?, la famille \mathcal{B} est-elle génératrice ?, la famille \mathcal{B} est-elle une base ?

3. Soient f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E et $A = \text{mat}(f, \mathcal{B})$ la matrice associée à f où $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ est la base canonique de E .

a- Donner la définition de $\text{Ker}(f)$ le noyau de f .

b- Quel doit être le rang de A pour que f soit bijective ?

c- Que doit vérifier le déterminant de A pour qu'elle soit inversible ?

Exercice 2 L'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ est connu comme étant un \mathbb{R} -e.v. de dimension 3 dont on connaît une base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$.

On considère l'ensemble

$$E = \{P(X) \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } P(0) = P(2)\}.$$

1. Montrer que E est un s.e.v. de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner une base de E .

On considère alors l'application f de E dans \mathbb{R} qui à $P(X)$ associe $P(1)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner successivement $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
3. Énoncer le théorème de la dimension et le vérifier pour f .

Exercice 3 On considère \mathbb{R}^3 muni des bases $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ et $\mathcal{B}' = \{\vec{u} = (1, 0, 1), \vec{v} = (0, 1, 0), \vec{w} = (1, 0, -1)\}$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice associée relativement à la base \mathcal{B} est donnée par :

$$A = \text{mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner $f(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Montrer que f est bijective.
3. Calculer $f(\vec{u}), f(\vec{v}), f(\vec{w})$. En déduire $D = \text{mat}(f, \mathcal{B}')$ la matrice associée à f relativement à la base \mathcal{B}' .
4. Donner P la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' et calculer son inverse P^{-1} .
5. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

1. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & 1 & i & -1 \\ 0 & i & 1 & i \\ 0 & 0 & i & 1 \end{vmatrix}.$$

2. On admet que

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 \end{vmatrix} = \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Donner la valeur des déterminants suivants en indiquant les propriétés sollicitées

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 + \sqrt{3}i & 1 - \sqrt{3}i \\ 1 + \sqrt{3}i & 1 - \sqrt{3}i & 1 + \sqrt{3}i \\ 1 - \sqrt{3}i & 1 + \sqrt{3}i & 2 \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{vmatrix}.$$