Algèbre
Déterminants

Denis Vekemans *

Exercice 1 Soient u et v des vecteurs de $\mathbb{R}^2$, a, a', b et b' des réels.
En utilisant les propriétés du déterminant, calculer $\det(au + bv, a'u + b'v)$ en fonction de $\det(u, v)$.

Exercice 2 Montrer, sans les calculer, que les déterminants suivants sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Exercice 3 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & -a & -a & -a \\ b & b & -b & -b \\ c & c & c & -c \\ d & d & d & d \end{vmatrix}$$

Exercice 4

1. Montrer que l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est surjective. Est-elle injective ?
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :
   M est inversible $\Leftrightarrow$ M^t est inversible.
3. Montrer que $S_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \,/\, \det M = 1\}$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice. Montrer que $\det A = \det A^t$.

Exercice 6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice dont chaque ligne et chaque colonne ne contient qu'un seul élément non nul. Montrer que A est inversible.

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Exercice 7 Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit la *trace* de la matrice A comme étant le nombre $tr(A) = a + d$.

1. Calculer la matrice $A^2 - tr(A)A + \det(A)I_2$.
2. On suppose que la matrice A est inversible. Montrer que la matrice A^{-1} est combinaison linéaire de I_2 et A.

Exercice 8 Soit $a \in \mathbb{C}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a & -a^2 & a \\ a & 1 & -a^3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer pour quelles valeurs de a la matrice A est inversible.

2. Dans les cas où A est inversible, résoudre dans $\mathbb{R}^3$ l'équation

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 Déterminant de Vandermonde

Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & {a_1}^2 & {a_1}^3 & \cdots & {a_1}^{n-1} \\ 1 & a_2 & {a_2}^2 & {a_2}^3 & \cdots & {a_2}^{n-1} \\ 1 & a_3 & {a_3}^2 & {a_3}^3 & \cdots & {a_3}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & {a_n}^2 & {a_n}^3 & \cdots & {a_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Exercice 10 Calculer les déterminants d'ordre n suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Exercice 11 Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leurs inverses.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \imath & -1 & 2\imath \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 On considère la matrice M donnée par

$$M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

Calculer $M^t M$.

A quelle condition nécessaire et suffisante, la matrice M est-elle inversible ? Sous cette condition, donner l'inverse de M.

Exercice 13 Septembre 2003

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, et $a, b \in \mathbb{K}$. Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 & a \\ 1 & b & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 Juin 2005

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, et $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 $\forall i \in \{1,2,3,4\},\ \forall j \in \{1,2,3,4\},\ a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

Donner **sans justifier** les valeurs des réels A, B, C, D, E et F (en fonction des $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \{1,2,3,4\},\ \forall j \in \{1,2,3,4\}$).

$$\begin{vmatrix} a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{a_{1,1}}{2} & \frac{a_{1,2}}{2} & \frac{a_{1,3}}{2} & \frac{a_{1,4}}{2} \\ \frac{a_{2,1}}{2} & \frac{a_{2,2}}{2} & \frac{a_{2,3}}{2} & \frac{a_{2,4}}{2} \\ \frac{a_{3,1}}{2} & \frac{a_{3,2}}{2} & \frac{a_{3,3}}{2} & \frac{a_{3,4}}{2} \\ \frac{a_{4,1}}{2} & \frac{a_{4,2}}{2} & \frac{a_{4,3}}{2} & \frac{a_{4,4}}{2} \end{vmatrix} = B \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4}+3 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4}+3 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4}+3 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4}+3 \end{vmatrix} = C \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} + D \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 1 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 1 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & 0 & a_{4,4} \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} + F \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix}.$$

Références

[1] M. Gran, *fiches de TD (L1)*, Université du Littoral Côte d'Opale.

[2] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 1. Algèbre*, Belin, Collection DIA, 1987.

[3] D. Duverney, S. Heumez, G. Huvent, *Toutes les mathématiques – Cours, exercices corrigés – MPSI, PCSI, PTSI, TSI*, Ellipses, 2004.