Algèbre
Déterminants

Denis Vekemans *

$\boxed{\textbf{Solution 6}}$ Soit $A = (a_{i,j})_{i\in\{1,\dots,n\},\ j\in\{1,\dots,n\}}$ avec $a_{i,j} \in \mathbb{R},\ \forall i \in \{1,\dots,n\},\ \forall j \in \{1,\dots,n\}$.

Soit T l'application qui

- à 1 associe l'indice de la colonne $T(1)$ telle que $a_{1,T(1)} \neq 0$,
- à 2 associe l'indice de la colonne $T(2)$ telle que $a_{2,T(2)} \neq 0$,
- ...
- à n associe l'indice de la colonne $T(n)$ telle que $a_{n,T(n)} \neq 0$.

L'application T est injective car chaque **colonne** ne contient qu'un seul élément non nul, et comme on est en dimension finie, on déduit que l'application T est bijective.

On note σ_n l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$ et $\varepsilon(\tau)$ la signature d'un élément τ de σ_n. D'après ce qui précède, on a $T \in \sigma_n$.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\tau\in\sigma_n} \varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} a_{2,\tau(2)} \dots a_{n,\tau(n)} \\
&= \sum_{\tau\in\sigma_n\setminus\{T\}} \varepsilon(\tau) \underbrace{a_{1,\tau(1)} a_{2,\tau(2)} \dots a_{n,\tau(n)}}_{=0 \text{ car chaque } \textbf{ligne} \text{ ne contient qu'un seul élément non nul}} \\
&+ \underbrace{\underbrace{\varepsilon(T)}_{\in\{-1,1\}} \underbrace{a_{1,T(1)} a_{2,T(2)} \dots a_{n,T(n)}}_{\neq 0}}_{\neq 0} \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

Ensuite, $\det(A) \neq 0$ équivaut à A est inversible.

$\boxed{\textbf{Solution 15}}$ A est la signature de la permutation

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Cette signature est -1 car la permutation est produit de 3 transpositions. Et, $A = -1$.

$B = (\frac{1}{2})^4$ par linéarité (multiplicative) du déterminant par rapport à chacune de ses colonnes.

$C = 1$ et $D = 3$ par linéarité (additive puis multiplicative) du déterminant par rapport à la quatrième colonne.

$E = -a_{2,3}$ et $F = a_{3,3}$ par développement du déterminant selon la troisième colonne.