Algèbre
Résolution de systèmes linéaires

Denis Vekemans *

Exercice 1 Résoudre le système en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases} .$$

Exercice 2 $t \in \mathbb{R}$. Discuter et résoudre le système en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x + y + z = t + 1 \\ 2x - y + (4t + 3)z = 0 \\ -x + 2y + 2t^2 z = 0 \end{cases} .$$

Exercice 3 Soit $\jmath = -\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$. Soient les matrices A et J données par

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \jmath & \jmath^2 \\ 1 & \jmath^2 & \jmath \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit JA.
2. Montrer qu'il existe une matrice Δ diagonale telle que $JA = \Delta J$.
3. Donner une forme factorisée de $\det(A)$.
4. $a, b, c \in \mathbb{R}$. Discuter et résoudre le système en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} ax + by + cz = 1 \\ cx + ay + bz = 1 \\ bx + cy + az = 1 \end{cases} .$$

Exercice 4 $\alpha \in \mathbb{C}$. Discuter et résoudre le système en $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} x + \alpha y + \alpha^2 z = 0 \\ \overline{\alpha} x + y + \alpha z = 0 \\ \overline{\alpha}^2 x + \overline{\alpha} y + z = 0 \end{cases} .$$

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Références

[1] M. Gran, *fiches de TD (L1)*, Université du Littoral Côte d'Opale.

[2] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 1. Algèbre*, Belin, Collection DIA, 1987.

[3] D. Duverney, S. Heumez, G. Huvent, *Toutes les mathématiques – Cours, exercices corrigés – MPSI, PCSI, PTSI, TSI*, Ellipses, 2004.