Algèbre
Résolution de systèmes linéaires

Denis Vekemans [*]

$\boxed{\textbf{Solution 4}}$ Le déterminant du système est :

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \overline{\alpha} & 1 & \alpha \\ \overline{\alpha}^2 & \overline{\alpha} & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \overline{\alpha} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \overline{\alpha} L_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1-\alpha\overline{\alpha} & \alpha(1-\alpha\overline{\alpha}) \\ 0 & 0 & 1-\alpha\overline{\alpha} \end{vmatrix} = (1-\alpha\overline{\alpha})^2$$

Le système est de Cramer si et seulement si $1 - \alpha\overline{\alpha} \neq 0$.

- $\boxed{\text{Premier cas } |\alpha| \neq 1.}$ Le système admet une unique solution (i.e. il est de Cramer) qui est triviale (i.e. $x = y = z = 0$) puisque le système est homogène (i.e. le second membre est nul).
  Solution dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: le point $O(0,0,0)$.
- $\boxed{\text{Deuxième cas } |\alpha| = 1.}$ On a $\overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$. Le système se réduit donc à une seule équation qui est $x + \alpha y + \alpha^2 z = 0$ (car les trois lignes du système d'origine sont proportionnelles).
  Solution dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: le plan normal à $\vec{u}(1, \alpha, \alpha^2)$ passant par $O(0,0,0)$ (i.e. le plan d'équation $x + \alpha y + \alpha^2 z = 0$).

[*]Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France