Algèbre
Polynômes

Denis Vekemans *

Exercice 1 Soit le polynôme $P = X^4 + 5X^3 + 10X^2 + 12X + 8$.

1. Démontrer que -2 est racine double du polynôme P.
2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Déduire les racines de P dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2 Soit le polynôme $P = X^4 + X^2 + 1$.

1. Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit le polynôme $P_n = X^n$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de P_n par $A_1 = X^2 - 3X - 4$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de P_n par $A_2 = X^2 + 1$.

Exercice 4 Soit le polynôme $P = X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 2X - 6$.

1. On se propose de démontrer que P n'a pas de racine double.
   (a) On se propose d'effectuer la division euclidienne de $2P$ par $\frac{1}{2}P'$. On note R le reste de cette division euclidienne.
   (b) Effectuer la division euclidienne de $\frac{1}{2}P'$ par R. On note T le reste de cette division euclidienne.
   (c) Démontrer que si a est une racine double de P, alors a est racine de R et de T.
   (d) Démontrer que P n'a pas de racine double.
2. On se propose de factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.
   (a) On pose $X = Y + 1$ et $Q(Y) = P(Y + 1)$. Calculer $Q(Y)$.

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

(b) Calculer les racines de Q dans $\mathbb{C}$. En déduire les racines de P dans $\mathbb{C}$.

(c) Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5 Soit le polynôme $P = X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X + 10$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z + 10$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Donner l'expression de $P(x(1+\imath))$ sous forme $P(x(1+\imath)) = Q(x) + \imath R(X)$, où Q et R sont des polynômes à coefficients réels.
2. Les équations $Q(x) = 0$ et $R(x) = 0$ ont-elles des racines communes ?
3. Donner deux racines complexes conjuguées de l'équation $P(z) = 0$.
4. Factoriser P sous forme d'un produit de deux trinômes du second degré à coefficients réels et en déduire les racines complexes de P.

Exercice 6 Déterminer les réels p et q pour que le polynôme $P = X^3 + pX + q$ soit divisible par le polynôme $Q = X^2 + 3X - 1$.

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme $X^2 - X + 1$ divise le polynôme $P_n = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $P_n = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$ par le polynôme $(X-2)^2$.

Exercice 9 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^6 + 1$.

Exercice 10 Déterminer $\lambda \in]0, \infty[$ tel que le polynôme $P = X^3 - 3X + \lambda$ ait une racine double. Quelle est alors l'autre racine de P ?

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme $P_n = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + \ldots + \frac{X^n}{n!}$ n'a pas de racine multiple.

Exercice 12 Déterminer tous les polynômes P tels que $(X^2+1)P'' - 6P = 0$ et $P(1) = 2$.

Exercice 13 Soit le polynôme $P = X^4 + 12X - 5$. Factoriser P dans $\mathbb{R}[x]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$ sachant qu'il admet deux racines dont le produit vaut -1.

Exercice 14 Résoudre le système en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xyz = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Factoriser le polynôme

$$P_n = 1 - X + \frac{X(X-1)}{2!} - \frac{X(X-1)(X-2)}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{X(X-1)(X-2)\ldots(X-n+1)}{n!}.$$

Exercice 16 Déterminer tous le polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.

Références

[1] M. Gran, *fiches de TD (L1)*, Université du Littoral Côte d'Opale.

[2] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 1. Algèbre*, Belin, Collection DIA, 1987.

[3] D. Duverney, S. Heumez, G. Huvent, *Toutes les mathématiques – Cours, exercices corrigés – MPSI, PCSI, PTSI, TSI*, Ellipses, 2004.