# *Algèbre*
# *Polynômes*

Denis Vekemans *

$\boxed{\textbf{Solution 14}}$ Le système n'est pas linéaire mais est symétrique en $x$, $y$, $z$ (ce qui signifie que : $[(x, y, z)$ est solution$]$ si et seulement si $[(x, z, y)$ est solution$]$ si et seulement si $[(y, x, z)$ est solution$]$ si et seulement si $[(y, z, x)$ est solution$]$ si et seulement si $[(z, x, y)$ est solution$]$ si et seulement si $[(z, y, x)$ est solution$]$).

Pour résoudre ce type de système, il est souvent intéressant de considérer $x$, $y$ et $z$ comme étant les trois racines d'un polynôme $P$. Ainsi, $P = (X-x)(X-y)(X-z) = X^3-(x+y+z)X^2+(xy+yz+zx)X-xyz$.

D'après les données du système, on connaît $x+y+z = 2$ et $xyz = -\frac{1}{2}$ mais pas $xy+yz+zx$. On cherche donc à calculer $xy + yz + zx$. Si on utilise $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$, on obtient après mise au dénominateur commun $\frac{yz+zx+xy}{xyz} = \frac{1}{2}$, puis, comme $xyz = -\frac{1}{2}$, $xy + yz + zx = -\frac{1}{4}$.

Ainsi, $x$, $y$ et $z$, solutions du système, sont aussi solutions du polynôme $P = X^3 - 2X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{2}$.

En représentant graphiquement la fonction polynomiale $P$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut se conjecturer que les racines de ce polynôme sont $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ et 2 (on peut aussi bien faire quelques essais pour observer que 2 est racine puis compléter par le calcul). On vérifie alors $P = (X + \frac{1}{2})(X - \frac{1}{2})(X - 2)$.

Ainsi, les solutions du système d'origine sont toutes les permutations possibles du triplet $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$.

$\boxed{\textbf{Solution 15}}$ On peut montrer par récurrence que

$$P_n = (-1)^n \frac{(X-1)(X-2)\dots(X-n)}{n!}.$$

$\boxed{\textbf{Solution 16}}$ Soit $P_n$ un polynôme de degré $n$ vérifiant la condition $P_n'$ divise $P_n$ ($P_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $a_n \neq 0$).

Comme $P_n'$ divise $P_n$, il existe un polynôme $Q$ tel que $P_n = QP_n'$.

Au regard du degré $n$ de $P_n$ et du degré $n-1$ de $P_n'$, on déduit que le polynôme $Q$ est de degré 1 et on pose $Q = \alpha(X - \beta)$.

Au regard du terme en $X^n$ de $P_n$ et de $QP_n'$, on obtient que $a_n = \alpha n a_n$, puis comme $a_n \neq 0$, $\alpha = \frac{1}{n}$.

En résumé, on a obtenu :

$$P_n = \frac{1}{n}(X-\beta)P_n' \tag{1}$$

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

On obtient donc que $\beta$ est racine de $P_n$.

En dérivant une fois l'équation (1), on obtient :

$$P'_n = \frac{1}{n}(X-\beta)P''_n + \frac{1}{n}P'_n \tag{2}$$

Et, on obtient $\underbrace{(1-\frac{1}{n})}_{\neq 0} P'_n = \frac{1}{n}(X-\beta)P''_n$, donc que $\beta$ est racine de $P'_n$.

En dérivant $k$ fois l'équation (1), on obtient (d'après la formule de Leibniz, à savoir pour la dérivée $k$ième du produit de fonctions $fg$, $(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} f^{(i)} g^{(k-i)}$) :

$$P_n^{(k)} = \frac{1}{n}(X-\beta)P_n^{(k+1)} + \frac{1}{n}kP_n^{(k)} \tag{3}$$

Et, on obtient $\underbrace{(1-\frac{k}{n})}_{\neq 0 \text{ tant que } k<n} P_n^{(k)} = \frac{1}{n}(X-\beta)P_n^{(k+1)}$, donc que $\beta$ est racine de $P_n^{(k)}$.

D'où, si $0 \leq k \leq n-1$, on a $P_n^{(k)}(\beta) = 0$ et par conséquent, $P_n = a_n(X-\beta)^n$ (car $\beta$ est racine de $P_n$ d'ordre $n$).