Algèbre
Ensembles et applications

Denis Vekemans *

Solution 8 $f \circ f \circ f = f$.

1. Montrer que f injective induit f surjective.

   Soit $y \in E$, on cherche $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

   On sait que pour tout $y \in E$, $f(f(f(y))) = f(y)$. Comme f est injective, on déduit $f(f(y)) = y$. Et, en posant $x = f(y) \in E$, on a $y = f(x)$.

2. Montrer que f surjective induit f injective.

   Soient x_1 et x_2 deux éléments de E teks que $f(x_1) = f(x_2)$. On cherche à montrer que $x_1 = x_2$.

   Comme f est surjective, il existe $y_1 \in E$ tel que $x_1 = f(y_1)$ et il existe $y_2 \in E$ tel que $x_2 = f(y_2)$. De même, il existe $z_1 \in E$ tel que $y_1 = f(z_1)$ et il existe $z_2 \in E$ tel que $y_2 = f(z_2)$. D'où, $f(x_1) = f(f(y_1)) = f(f(f(z_1))) = f(z_1) = y_1$ et $f(x_2) = f(f(y_2)) = f(f(f(z_2))) = f(z_2) = y_2$. Ainsi, de $f(x_1) = f(x_2)$, on déduit $y_1 = y_2$ puis $f(y_1) = f(y_2)$ ou encore $x_1 = x_2$.

Solution 10

1. Soit $P_1 = f(\bigcup_{i \in I} A_i)$ et $Q_1 = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.

$$\begin{aligned} x \in P_1 &\iff \exists u \in \bigcup_{i \in I} A_i \text{ tel que } f(u) = x \\ &\iff \exists i \in I, \exists u \in A_i \text{ tel que } f(u) = x \\ &\iff \exists i \in I, x \in f(A_i) \\ &\iff x \in Q_1. \end{aligned}$$

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Soit $P_2 = f(\bigcap_{i\in I} A_i)$ et $Q_2 = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

$$\begin{array}{rcl} x \in P_2 & \Longleftrightarrow & \exists u \in \bigcap_{i\in I} A_i \text{ tel que } f(u) = x \\ & \Longleftrightarrow & \exists u \in E \text{ tel que } \forall i \in I, u \in A_i \text{ et } f(u) = x \\ & \Longrightarrow & \forall i \in I, x \in f(A_i) \\ & \Longleftrightarrow & x \in Q_2. \end{array}$$

$P_2 \subset Q_2$. Cette inclusion est stricte : si on prend $E = \{a, b\}$, $F = \{c\}$, $f : E \longrightarrow F; a \mapsto c; b \mapsto c$, $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b\}$, on a alors $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$ et $f(A_1) \cap f(A_2) = F \cap F = F$.

2. Soit $P_3 = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i)$ et $Q_3 = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

$$\begin{array}{rcl} x \in P_3 & \Longleftrightarrow & \exists u \in \bigcup_{i\in I} B_i \text{ tel que } f^{-1}(u) = x \\ & \Longleftrightarrow & \exists i \in I, \exists u \in B_i \text{ tel que } f^{-1}(u) = x \\ & \Longleftrightarrow & \exists i \in I, x \in f^{-1}(B_i) \\ & \Longleftrightarrow & x \in Q_3. \end{array}$$

Soit $P_4 = f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i)$ et $Q_4 = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

$$\begin{array}{rcl} x \in P_4 & \Longleftrightarrow & \exists u \in \bigcap_{i\in I} B_i \text{ tel que } f^{-1}(u) = x \\ & \Longleftrightarrow & \exists u \in F \text{ tel que } \forall i \in I, u \in B_i \text{ et } f^{-1}(u) = x \\ & \underbrace{\Longleftrightarrow}_{\text{Cette fois, il y a équivalence car } u=f(x)} & \forall i \in I, x \in f^{-1}(B_i) \\ & \Longleftrightarrow & x \in Q_4. \end{array}$$

D'autre part,

$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}(\overline{B}) & \Longleftrightarrow & f(x) \notin B \\ & \Longleftrightarrow & x \notin f^{-1}(\overline{B}) \\ & \Longleftrightarrow & x \in \overline{f^{-1}(B)}. \end{array}$$

Contrairement à f, l'application f^{-1} est compatible avec les trois lois ensemblistes usuelles : inclusion, intersection, passage au complémentaire.

On dit que l'application f^{-1} est un morphisme de $(\mathcal{P}(F), \cup, \cap, \bar{\cdot})$ dans $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap, \bar{\cdot})$.

On en conclut, par exemple, que

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(B_1 \backslash B_2) & = & f^{-1}(B_1 \cap \overline{B_2}) \\ & = & f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(\overline{B_2}) \\ & = & f^{-1}(B_1) \cap \overline{f^{-1}(B_2)} \\ & = & f^{-1}(B_1) \backslash f^{-1}(B_2) \end{array}$$

ou que

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_3 \Delta B_4) &= f^{-1}((B_3 \cap \overline{B_4}) \cup (B_4 \cap \overline{B_3})) \\ &= f^{-1}(B_3 \cap \overline{B_4}) \cup f^{-1}(B_4 \cap \overline{B_3}) \\ &= (f^{-1}(B_3) \cap f^{-1}(\overline{B_4})) \cup (f^{-1}(B_4) \cap f^{-1}(\overline{B_3})) \\ &= f^{-1}(B_3) \Delta f^{-1}(B_4) \end{aligned}$$

3.

$$t \in X \Longrightarrow f(t) \in f(X) \Longrightarrow t \in f^{-1}(f(X)).$$

$$u \in f(f^{-1}(Y)) \Longrightarrow \exists x \in f^{-1}(Y) \text{ tel que } u = f(x) \in Y.$$

Cas où f n'est pas injective. Si on prend $E = \{a, b\}$, $F = \{c\}$, $f : E \longrightarrow F; a \mapsto c; b \mapsto c$, $X = \{a\}$, on a alors $f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(F) = E \neq X$. La première inclusion est stricte.

Cas où f n'est pas surjective. Si on prend $E = \{a\}$, $F = \{b, c\}$, $f : E \longrightarrow F; a \mapsto b$, $Y = F$, on a alors $f(f^{-1}(Y)) = f(E) = \{b\} \neq Y$. La deuxième inclusion est stricte.