Algèbre
Relations d'équivalence

Denis Vekemans *

Exercice 1 Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation de E dans E.

Dans chacun des exemples ci-dessous, donner les propriétés (réflexivité, symétrie, transitivité) vérifiées par $\mathcal{R}$.

1. E est l'ensemble des droites du plan. $\mathcal{R}$ est définie par $D \mathcal{R} D' \Longleftrightarrow D \perp D'$.
2. E est l'ensemble des cercles du plan. $\mathcal{R}$ est définie par $\Gamma \mathcal{R} \Gamma' \Longleftrightarrow \Gamma$ et Γ' se coupent en exatcement deux points.
3. E est l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$: $E = \mathcal{C}[0,1]$. $\mathcal{R}$ est définie par $f \mathcal{R} g \Longleftrightarrow \forall x \in [0,1],\ f(x) \leq g(x)$.
4. E est l'ensemble des fonctions de définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. $\mathcal{R}$ est définie par $f \mathcal{R} g \Longleftrightarrow f - g$ est une fonction paire.
5. $E = \mathbb{R}$. $\mathcal{R}$ est définie par $x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow xe^y = ye^x$.
6. $E = \mathbb{Z}^*$. $\mathcal{R}$ est définie par $x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow x$ divise y.
7. $E = \mathcal{P}(X)$, où X est un ensemble. $\mathcal{R}$ est définie par $A \mathcal{R} B \Longleftrightarrow A \subset B$.

Exercice 2 Dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, démontrer que la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$(x,y) \mathcal{R} (x',y') \Longleftrightarrow xy' = x'y$$

est une relation d'équivalence.

Exercice 3 Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation réflexive et transitive de E vers E et $\mathcal{S}$ la relation de E vers E définie par

$$x \mathcal{S} y \Longleftrightarrow (x \mathcal{R} y) \ \wedge \ (y \mathcal{R} x).$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Exercice 4 On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ de X dans X est circulaire si

$$(x \mathcal{R} y) \wedge (y \mathcal{R} z) \Longrightarrow z \mathcal{R} x.$$

Montrer qu'une relation est réflexive et circulaire si et seulement si elle est une relation d'équivalence.

Exercice 5 Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire de X dans X, symétrique et transitive.

Donc, $x \mathcal{R} y$ implique que $y \mathcal{R} x$, par symétrie, et comme $(x \mathcal{R} y) \wedge (y \mathcal{R} x)$, cela induit que $x \mathcal{R} x$, par transitivité.

Donc, $\mathcal{R}$ est réflexive et est, par conséquent, une relation d'équivalence.

Donner un exemple $\mathcal{R}$ de relation binaire de X dans X, symétrique et transitive, mais non réflexive.

Exercice 6 Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ la relation de E vers E définie par

$$x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow x = y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Pour tout $x \in E$, déterminer la classe d'équivalence de x.
3. Déterminer l'ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$.

Exercice 7 On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \Longleftrightarrow x - 5y' = x' - 5y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Vérifier que la classe d'équivalence de $(0, 0)$, que l'on notera $\mathcal{R}(0, 0)$, est une droite $\mathcal{D}$ à préciser.
3. Vérifier que toute classe d'équivalence $\mathcal{R}(x, y)$ est une droite parallèle à $\mathcal{D}$.
4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = x + 5y$.

   Montrer que

   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(\mathcal{R}(x, y)) = x + 5y.$$

   Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{R}_n$ la relation définie dans $\mathbb{Z}$ par

$$x \mathcal{R}_n y \Longleftrightarrow n \text{ divise } x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}_n$ est une relation d'équivalence.

   Elle est appelée *congruence modulo* n et on note $x \equiv y \mod (n)$ au lieu de $x \mathcal{R}_n y$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, déterminer la classe de x modulo n.
3. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par $\mathcal{R}_n$. Quel est son cardinal ?

Exercice 9 Soit f une application de E vers F et soit $\mathcal{R}$ la relation de E vers E définie par

$$x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow f(x) = f(y).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Pour tout $x \in E$, on note $\overline{x}$ la classe d'équivalence de x.
   Montrer que l'application Φ de $E/\mathcal{R}$ vers f définie par $\Phi(\overline{x}) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 10 Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{N}^*$ définie par

$$x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow x \text{ divise } y.$$

Montrer que $(\mathbb{N}^*, \mathcal{R})$ est un ensemble partiellement ordonné.

Références

[1] M. Gran, *fiches de TD (L1)*, Université du Littoral Côte d'Opale.

[2] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 1. Algèbre*, Belin, Collection DIA, 1987.

[3] D. Duverney, S. Heumez, G. Huvent, *Toutes les mathématiques – Cours, exercices corrigés – MPSI, PCSI, PTSI, TSI*, Ellipses, 2004.