Algèbre
Groupes

Denis Vekemans *

Exercice 1 Soit $\star$ la loi de composition sur $\mathbb{R}$ définie par

$$x \star y = x + y - xy.$$

1. Montrer que $\star$ est commutative et associative.
2. Montrer que $\star$ admet un élément neutre e que l'on précisera.
3. Montrer que tout élément $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ admet pour inverse $\dfrac{x}{x-1}$.
4. $(\mathbb{R}, \star, e)$ est-il un groupe ? $(\mathbb{R}\backslash\{1\}, \star, e)$ est-il un groupe ?
5. Calculer $\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{n\text{fois}}$.

Exercice 2 (d'après septembre 2001)
Soit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $*$ la loi de composition définie sur G par :

$$(x, y) \star (x', y') = (x'y + \frac{x}{y'}, yy').$$

1. Vérifier que $\star$ est une loi interne dans G.
2. La loi $\star$ est-elle associative ? Est-elle commutative ?
3. A-t-on un élément neutre dans $(G, \star)$?
4. $(G, \star)$ est-il un groupe ?

Exercice 3 Montrer que la différence symétrique $\Delta\ :\ \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ munit l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties d'un ensemble X d'une structure de groupe abélien.

Exercice 4 Si $n \in \mathbb{N}$, on note

$$n\mathbb{Z} = \{nz \text{ tels que } z \in \mathbb{Z}\}.$$

Montrer qu'un sous-ensemble H de $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$.

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Exercice 5 Soit G un groupe et soient H et K deux sous-groupes de G.

1. Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.
2. D'une manière générale, $H \cup K$ est-il un sous groupe de G ?

Exercice 6 Soit $(G, \star)$ et $(G', \cdot)$ deux groupes et soit $\top$ la loi produit définie dans $G \times G'$ par

$$(x, y)\top(x', y') = (x \star x', y \cdot y').$$

1. Montrer que $(G \times G', \top)$ est un groupe.
2. Notons par π et π' les projections de $G \times G'$ sur G et G' respectivement. Soit H un groupe, $f : H \to G$ et $f' : H \to G'$ deux homomorphismes ; montrer qu'il existe un et un seul homomorphisme $h : H \to G \times G'$ tel que l'on ait $\pi \circ h = f$ et $\pi' \circ h = f'$.
3. Soit H un sous-groupe de G et H' un sous-groupe de G'.
   Montrer que $H \times H'$ est un sous-groupe de $G \times G'$.

Exercice 7 Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On appelle *centre de* G le sous-ensemble

$$Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G, x \cdot y = y \cdot x\}.$$

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $Z(G)$ pour que G soit abélien.

Exercice 8 Soit un groupe $(G, \cdot)$ on a que $x \cdot x = x$ pour tout x dans G. Décrire tous les groupes $(G, \cdot)$ qui ont cette propriété.

Exercice 9 Montrer que si G est un groupe abélien et $f : G \to H$ est un homomorphisme surjectif, alors H est abélien.

Exercice 10 Soient G et G' deux groupes et soit e l'élément neutre de G. Soit $f : G \to G'$ un homomorphisme.
Montrer que f est injectif si et seulement si $\ker f = \{e\}$.

Exercice 11 Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

1. L'application $f : (G, \cdot) \to (G, \cdot)$ définie par $f(g) = g^{-1}$ est-elle un homomorphisme ?
2. Quand est-ce que f est un isomorphisme ?

Exercice 12 Soient G et G' deux groupes et soient f et g deux homomorphismes définis sur G à valeurs dans G'. Désignons par H l'ensemble des éléments x de G tels que $f(x) = g(x)$.

Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 13 Considérons les permutations des points d'une figure géométrique du plan qui conservent les distances, appelées *isometries*. Les isométries d'un triangle équilateral forment un groupe : donner une description de ce groupe.

Exercice 14 Soit G un groupe, A et B deux sous-groupes permutables de G, i.e. $A \cdot B = B \cdot A$. Montrer que $A \cdot B$ est un sous-groupe de G.

Exercice 15 Soient $(G, \cdot)$ et $(G', \star)$ deux groupes, et soit $f : G \to G'$ un homomorphisme.
Si H' est un sous-groupe distingué de G', montrer que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe distingué de G.

Exercice 16 Si G est un ensemble non vide, on appelle *groupe de transformations de* G tout sous-groupe du groupe $S(G)$ des permutations de G.
Le but de cet exercice est de montrer que tout groupe est isomorphe à un groupe de transformations.

1. Soit $(G, \cdot)$ un groupe, a un élément de G. Montrer que l'application $f_a : G \to G$ définie par $f_a(x) = a \cdot x$ pour tout $x \in G$ est bijective.
2. Soit T l'ensemble des applications de la forme f_a, i.e. $T = \{f_a \mid a \in G\}$. Montrer que T est un groupe de transformations de G.
3. Montrer que l'application $f : G \to T$ définie par $f(a) = f_a$ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 17 Soit $\star$ la loi définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \star y = x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2}.$$

Montrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Aide : on peut penser à $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \sinh(x)$.

Exercice 18

1. Donner un exemple de morphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.
2. Donner un exemple de morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
3. Donner un exemple de morphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{U}_n, \times)$.
   $\mathbb{U}_n = \{\omega \in \mathbb{C}$ tels que $\omega = e^{\frac{2\imath k\pi}{n}}$ et $k \in \mathbb{N}\}$.
4. Soit $(\mathcal{R}, \circ)$ le groupe des rotations de centre O dans le plan. Donner un exemple de morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathcal{R}, \circ)$.

Exercice 19 Soit $ABCD$ un carré (direct). Soit O son centre.
On note $\Delta = (AC)$, $\Delta' = (BD)$, $\delta =$ médiatrice$([AB])$ et $\delta' =$ médiatrice$([AD])$. On désigne par

- Id l'identité,
- s_O la symétrie de centre O,
- $r_{O,\alpha}$ la rotation de centre O et d'angle α (et ce pour chaque angle $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$),
- s_d la symétrie orthogonale par rapport à la droite d (et ce pour chacune des droites Δ, Δ', δ, δ').

Soit $Isom$ l'ensemble des isométries du carré :

$$Isom = \{Id, s_0, r_{O,\frac{\pi}{2}}, r_{O,-\frac{\pi}{2}}, s_\Delta, s_{\Delta'}, s_\delta, s_{\delta'}\}.$$

Construire la table de la loi du groupe $(Isom, \circ, Id)$.

S'agit-il d'un groupe abélien ?

Soit $Isom$ l'ensemble des isométries positives du carré :

$$Isom_+ = \{Id, s_0, r_{O,\frac{\pi}{2}}, r_{O,-\frac{\pi}{2}}\}.$$

Montrer que

$$\{Id\} \trianglelefteq \{Id, s_O\} \trianglelefteq Isom_+ \trianglelefteq Isom.$$

Références

[1] M. Gran, *fiches de TD (L1)*, Université du Littoral Côte d'Opale.

[2] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 1. Algèbre*, Belin, Collection DIA, 1987.

[3] D. Duverney, S. Heumez, G. Huvent, *Toutes les mathématiques – Cours, exercices corrigés – MPSI, PCSI, PTSI, TSI*, Ellipses, 2004.