Algèbre
Groupes, ...

Denis Vekemans [*]

$\boxed{\textbf{Solution 15}}$ $(G, \cdot, e)$ et $(G', \star, e')$ deux groupes et $f\ :\ G \to G'$ un homomorphisme.

$$H' \trianglelefteq G'.$$

Montrons d'abord que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.

On a $f(e) = e'$ par propriété d'un homomorphisme.

Ainsi, $f^{-1}(e') \in f^{-1}(H')$ et $f^{-1}(H') \neq \emptyset$.

Il reste à motrer que $\forall u \in f^{-1}(H'), \forall v \in f^{-1}(H'), u \cdot v^{-1} \in f^{-1}(H')$ ...

Sous ces conditions, $\exists x \in H'$ tel que $f^{-1}(x) = u$ et $\exists y \in H'$ tel que $f^{-1}(y) = v$, donc

$$\begin{array}{rcl} f(u \cdot v^{-1}) & = & f(u) \star f(v^{-1}) \text{ par définition d'un homomorphisme} \\ & = & f(u) \star (f(v))^{-1} \text{ par propriété d'un homomorphisme} \\ & = & x \star y^{-1} \in H' \text{ car } H' < G' \end{array}$$

et donc, $u \cdot v^{-1} \in f^{-1}(H')$.

Ainsi, $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.

Montrons ensuite que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe distingué de G.

Il reste à montrer que $\forall u \in f^{-1}(H'), \forall g \in G, g \cdot u \cdot g^{-1} \in f^{-1}(H')$ ...

Sous ces conditions, $\exists x \in H'$ tel que $f^{-1}(x) = u$.

$$\begin{array}{rcl} f(g \cdot u \cdot g^{-1}) & = & f(g) \star f(u) \star f(g^{-1}) \text{ par définition d'un homomorphisme} \\ & = & f(g) \star f(u) \star (f(g))^{-1} \text{ par propriété d'un homomorphisme} \\ & = & f(g) \star x \star f(g)^{-1} \in H' \text{ car } H' \trianglelefteq G' \end{array}$$

et donc, $g \cdot u \cdot g^{-1} \in f^{-1}(H')$.

Ainsi, $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe distingué de G.

$\boxed{\textbf{Solution 17}}$ $x \star y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$.

[*]Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \sinh(x)$.

$$\begin{aligned} \phi(x) \star \phi(y) &= \phi(x)\sqrt{1+\phi(y)^2} + \phi(y)\sqrt{1+\phi(x)^2} \\ &= \sinh(x)\sqrt{1+\sinh^2(y)} + \sinh(y)\sqrt{1+\sinh^2(x)} \\ &= \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x) \\ &= \sinh(x+y) = \phi(x+y) \end{aligned}$$

Donc, ϕ est un **homomorphisme**.

Or ϕ est bijective, de bijection réciproque $\phi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \arg\sinh(x)$.

D'où ϕ est un **isomorphisme**.

Solution 19 Soit $ABCD$ un carré (direct). Soit O son centre.

On note $\Delta = (AC)$, $\Delta' = (BD)$, $\delta =$ médiatrice$([AB])$ et $\delta' =$ médiatrice$([AD])$. On désigne par

- Id l'identité,
- s_O la symétrie de centre O,
- $r_{O,\alpha}$ la rotation de centre O et d'angle α (et ce pour chaque angle $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$),
- s_d la symétrie orthogonale par rapport à la droite d (et ce pour chacune des droites Δ, Δ', δ, δ').

Soit $Isom$ l'ensemble des isométries du carré :

$$Isom = \{Id = u_1, s_0 = u_2, r_{O,\frac{\pi}{2}} = u_3, r_{O,-\frac{\pi}{2}} = u_4, s_\Delta = u_5, s_{\Delta'} = u_6, s_\delta = u_7, s_{\delta'} = u_8\}.$$

Construire la table de la loi du groupe $(Isom, \circ, Id)$.

En ligne i, colonne j, on trouve $u_i \circ u_j$.

$\circ$	Id	s_0	$r_{O,\frac{\pi}{2}}$	$r_{O,-\frac{\pi}{2}}$	s_Δ	$s_{\Delta'}$	s_δ	$s_{\delta'}$
Id	Id	s_0	$r_{O,\frac{\pi}{2}}$	$r_{O,-\frac{\pi}{2}}$	s_Δ	$s_{\Delta'}$	s_δ	$s_{\delta'}$
s_O	s_0	Id	$r_{O,-\frac{\pi}{2}}$	$r_{O,\frac{\pi}{2}}$	$s_{\Delta'}$	s_Δ	$s_{\delta'}$	s_δ
$r_{O,\frac{\pi}{2}}$	$r_{O,\frac{\pi}{2}}$	$r_{O,-\frac{\pi}{2}}$	s_O	Id	s_δ	$s_{\delta'}$	$s_{\Delta'}$	s_Δ
$r_{O,-\frac{\pi}{2}}$	$r_{O,-\frac{\pi}{2}}$	$r_{O,\frac{\pi}{2}}$	Id	s_O	$s_{\delta'}$	s_δ	s_Δ	$s_{\Delta'}$
s_Δ	s_Δ	$s_{\Delta'}$	$s_{\delta'}$	s_δ	Id	s_O	$r_{O,-\frac{\pi}{2}}$	$r_{O,\frac{\pi}{2}}$
$s_{\Delta'}$	$s_{\Delta'}$	s_Δ	s_δ	$s_{\delta'}$	s_O	Id	$r_{O,\frac{\pi}{2}}$	$r_{O,-\frac{\pi}{2}}$
s_δ	s_δ	$s_{\delta'}$	s_Δ	$s_{\Delta'}$	$r_{O,\frac{\pi}{2}}$	$r_{O,-\frac{\pi}{2}}$	Id	s_O
$s_{\delta'}$	$s_{\delta'}$	s_δ	$s_{\Delta'}$	s_Δ	$r_{O,-\frac{\pi}{2}}$	$r_{O,\frac{\pi}{2}}$	s_O	Id

S'agit-il d'un groupe abélien ?

Non, car la table n'est pas symétrique (par exemple, $s_\Delta \circ s_\delta \neq s_\delta \circ s_\Delta$).

Soit $Isom$ l'ensemble des isométries positives du carré : $Isom_+ = \{Id, s_0, r_{O,\frac{\pi}{2}}, r_{O,-\frac{\pi}{2}}\}$.

Montrer que $\{Id\} \trianglelefteq \{Id, s_O\} \trianglelefteq Isom_+ \trianglelefteq Isom$.

Il est évident que $\{Id\} < \{Id, s_O\} < Isom_+ < Isom$, d'après la table du groupe $(Isom, \circ)$.

- $\{Id\} \trianglelefteq \{Id, s_O\}$?
  $Id \circ Id \circ Id = Id \in \{Id\}$, et $s_O \circ Id \circ \underbrace{s_O^{-1}}_{=s_O} = Id \in \{Id\}$.
  D'où $\{Id\} \trianglelefteq \{Id, s_O\}$.
- $\{Id, s_O\} \trianglelefteq Isom_+$?
  $Id \circ Id \circ Id = Id \in \{Id, s_O\}$, $s_O \circ Id \circ \underbrace{s_O^{-1}}_{=s_O} = Id \in \{Id, s_O\}$, $r_{O,\frac{\pi}{2}} \circ Id \circ \underbrace{r_{O,\frac{\pi}{2}}^{-1}}_{=r_{O,-\frac{\pi}{2}}} = Id \in \{Id, s_O\}$,
  $r_{O,-\frac{\pi}{2}} \circ Id \circ \underbrace{r_{O,\frac{-\pi}{2}}^{-1}}_{=r_{O,\frac{\pi}{2}}} = Id \in \{Id, s_O\}$, $Id \circ s_O \circ Id = s_O \in \{Id, s_O\}$, $s_O \circ s_O \circ \underbrace{s_O^{-1}}_{=s_O} = s_O \in \{Id, s_O\}$,
  $r_{O,\frac{\pi}{2}} \circ s_O \circ \underbrace{r_{O,\frac{\pi}{2}}^{-1}}_{=r_{O,-\frac{\pi}{2}}} = s_O \in \{Id, s_O\}$, et $r_{O,-\frac{\pi}{2}} \circ s_O \circ \underbrace{r_{O,\frac{-\pi}{2}}^{-1}}_{=r_{O,\frac{\pi}{2}}} = s_O \in \{Id, s_O\}$.
  D'où $\{Id, s_O\} \trianglelefteq Isom_+$.
- $Isom_+ \trianglelefteq Isom$? Les démonstrations précédentes font une exhaustion des cas possibles ... Cependant, on peut également réfléchir pour éviter d'écrire de longues lignes inutiles.
  Ainsi, les éléments de $Isom_+$ sont des rotations de centre O (d'angles 0 -auquel cas, c'est Id-, $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ et π -auquel cas, c'est s_O-).
  Et, les éléments de $Isom$ sont des rotations de centre O ou des symétries orthogonales par rapport à des axes contenant O.
  Premier cas : $g \in Isom$ avec g une rotation de centre O, donc $g \in Isom_+$. $h \in Isom_+$ avec h une rotation de centre O.
  $g \circ h \circ g^{-1}$ est donc composée de trois rotations de $Isom_+$ et est, d'après la table du groupe $Isom$, une rotation de $Isom_+$.
  Second cas : $g \in Isom$ avec g une symétrie orthogonale par rapport à un axe contenant O, donc $g \notin Isom_+$. $h \in Isom_+$ avec h une rotation de centre O.
  $h \in Isom_+$ est, d'après la table du groupe $Isom$, composée de deux symétries orthogonales de $Isom$:
  $h = g_1 \circ g_2$ avec $g_1 \in Isom$, $g_1 \notin Isom_+$ $g_2 \in Isom$ et $g_2 \notin Isom_+$.
  $g \circ h \circ g^{-1} = g \circ (g_1 \circ g_2) \circ g^{-1} = (g \circ g_1) \circ (g_2 \circ g^{-1})$.
  Maintenant, d'après la table du groupe $Isom$, $g \circ g_1$ et $g_2 \circ g^{-1}$ sont des rotations de $Isom_+$ (car g, g_1, g_2, g^{-1} sont des éléments de $Isom$ sans être des éléments de $Isom_+$).
  D'où $g \circ h \circ g^{-1} = (g \circ g_1) \circ (g_2 \circ g^{-1})$ est donc composée de deux rotations de $Isom_+$ et est, d'après la table du groupe $Isom$, une rotation de $Isom_+$.
  Conclusion sur les deux cas. $\forall g \in Isom, \forall h \in Isom_+, g \circ h \circ g^{-1} \in Isom_+$ et $Isom_+ \trianglelefteq Isom$.

Remarque 1. Le théorème suivant aurait aussi pu être utilisé.

THEOREME. Soient d et d' deux droites sécantes en O. Alors $s_d \circ s_{d'} = r_{O,2(\widehat{d',d})}$.

Réciproquement, soit $r_{O,\alpha}$ et soit d une droite contenant O. Alors, il existe une unique droite d' contenant O telle que $r_{O,\alpha} = s_d \circ s_{d'}$ et dans ce cas, $\alpha = 2(\widehat{d',d})$, ou encore, il existe une unique droite d'' contenant O telle que $r_{O,\alpha} = s_{d''} \circ s_d$ et dans ce cas, $\alpha = 2(\widehat{d,d''})$.

Remarque 2. Il existe d'autres sous-groupes de $Isom$ comme $\{Id, s_0, s_\Delta, s_{\Delta'}\}$ ou encore $\{Id, s_0, s_\delta, s_{\delta'}\}$.