Algèbre
Anneaux - Corps

Denis Vekemans *

Exercice 1 Soit $(A, +, 0_A)$ un groupe abélien.

On munit l'ensemble A d'une autre loi binaire $\cdot$, en posant $a \cdot b = 0_A$, pour tout $a, b \in A$.

Montrer que $(A, +, \cdot)$ est un anneau commutatif.

Exercice 2 Soit

$$2\mathbb{Z} = \{2z \text{ tels que } z \in \mathbb{Z}\}.$$

Montrer que $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif.

Exercice 3 (Mars 2004) Soit $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ l'anneau des nombres réels.

On définit deux nouvelles lois $\bigoplus$ et $\bigotimes$ sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $x \bigoplus y = x + y - 2$ et $x \bigotimes y = x \cdot y - 2x - 2y + 6$.

1. Montrer que $(\mathbb{R}, \bigoplus)$ est un groupe abélien.
2. Montrer que $(\mathbb{R}, \bigoplus, \bigotimes)$ est un anneau commutatif unitaire.

Exercice 4 On considère le produit cartésien $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a, b) \text{ tels que } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$.

On pose

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

et

$$(a, b) \circ (c, d) = (a \cdot c, a \cdot d + b \cdot c)$$

pour tout $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Montrer que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \circ)$ est un anneau commutatif.

L'anneau $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \circ)$ est-il unitaire ?

Exercice 5 Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif.

Notons 0 et 1 respectivement le neutre pour $+$ et pour $\cdot$.

Soit P une partie de A telle que

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

1. P est stable pour $+$ dans A ;
2. $P \cap (-P) = \{0\}$ et $P \cup (-P) = A$.

Montrer que la relation $\leq$ sur A définie par $x \leq y$ si et seulement si $y - x \in P$ est un ordre total sur A.

Exercice 6 Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau idempotent, c'est-à-dire tel que, pour tout $x \in A$, $x \cdot x = x$.

Notons 0 et 1 respectivement le neutre pour $+$ et pour $\cdot$.

1. Montrer que, pour tout $x \in A$, $x + x = 0$.
2. En déduire que A est commutatif.
3. Montrer que la relation binaire définie sur A par
$$x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow x \cdot y = x,$$
est une relation d'ordre sur A.
4. Si A est $(A, +, \cdot)$ un anneau idempotent intègre, montrer que A est soit trivial, soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Exercice 7 Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau unitaire.

Notons 0 et 1 respectivement le neutre pour $+$ et pour $\cdot$.

On munit l'ensemble A de deux opérations : $a \bigoplus b = a + b + 1$ et $a \bigotimes b = a \cdot b + a + b$.

1. Montrer que $(A, \bigoplus, \bigotimes)$ est un anneau.
2. Montrer que l'application $f\colon (A, +, \cdot) \to (A, \bigoplus, \bigotimes)$ définie par $f(a) = a - 1$ est un isomorphisme d'anneaux.

Exercice 8 m et n sont deux entiers naturels premiers entre eux.

Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Exercice 9 Soit
$$\mathbb{Q}[\imath] = \{a + b\imath \text{ tels que } (a, b) \in \mathbb{Q}^2\} \subset \mathbb{C}.$$

Montrer que $\mathbb{Q}[\imath]$ est un sous-corps du corps $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ des nombres complexes.

Soit
$$\mathbb{Z}[\imath] = \{a + b\imath \text{ tels que } (a, b) \in \mathbb{Z}^2\} \subset \mathbb{C}.$$

$\mathbb{Z}[\imath]$ est-il un sous-corps du corps $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ des nombres complexes ?

Exercice 10 Montrer que tout anneau commutatif unitaire intègre fini est un corps.

Exercice 11 Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau unitaire commutatif. Notons 0 et 1 respectivement le neutre pour $+$ et pour $\cdot$.

Un élément x de A est dit *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$.

On peut montrer que $\forall (x, y) \in A^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$(x+y)^p = \sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} x^k y^{p-k},$$

où

$$\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = \frac{p!}{k!\,(p-k)!}.$$

(a) Soient x et y deux éléments nilpotents de A. Montrer que $x + y$ est nilpotent.

(b) Soit x un élément nilpotent de A et soit $y \in A$. Montrer que xy est nilpotent.

(c) Soit $x \in A$ nilpotent. Montrer que $1 - x$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 12 Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif unitaire.

Soit S une partie de A stable pour $\cdot$ ne contenant pas 0.

On définit

– une relation binaire $\mathcal{R}$ par

$$\forall (a, s) \in A \times S,\ \forall (a', s') \in A \times S,\ (a, s)\ \mathcal{R}\ (a', s') \Longleftrightarrow \exists \omega \in S \text{ tel que } \omega \cdot (a \cdot s' - a' \cdot s) = 0.$$

– une loi de composition notée $\clubsuit$

$$\forall (a, s) \in A \times S,\ \forall (a', s') \in A \times S,\ (a, s) \clubsuit (a', s') = (a \cdot s' + a' \cdot s, s \cdot s').$$

– une loi de composition notée $\spadesuit$

$$\forall (a, s) \in A \times S,\ \forall (a', s') \in A \times S,\ (a, s) \spadesuit (a', s') = (a \cdot a', s \cdot s').$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur F et que $F/\mathcal{R}$ peut être muni de la structure d'anneau quotient.

Exercice 13 Déterminer tous les endomorphismes du corps $\mathbb{R}$.

Références

[1] M. Gran, *fiches de TD (L1)*, Université du Littoral Côte d'Opale.

[2] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 1. Algèbre*, Belin, Collection DIA, 1987.

[3] D. Duverney, S. Heumez, G. Huvent, *Toutes les mathématiques – Cours, exercices corrigés – MPSI, PCSI, PTSI, TSI*, Ellipses, 2004.