Algèbre
Anneaux - Corps

Denis Vekemans *

Solution 3

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $x \bigoplus y = x+y-2$ et $x \bigotimes y = x \cdot y - 2x - 2y + 6$.
   - $x \bigoplus y = x+y-2 \in \mathbb{R}$. Donc $\bigoplus$ est une loi interne.
   - $x \bigoplus (y \bigoplus z) = x+y+z-4 = (x \bigoplus y) \bigoplus z$. Donc $\bigoplus$ est une loi associative.
   - $x \bigoplus y = x+y-2 = y \bigoplus x$. Donc $\bigoplus$ est une loi commutative.
   - $x \bigoplus 2 = x$. Donc 2 est élément neutre pour $\bigoplus$.
   - $x \bigoplus (4-x) = 2$. Donc tout x est inversible (d'inverse $4-x$) par $\bigoplus$.

   Ainsi, $(\mathbb{R}, \bigoplus, 2)$ est un groupe abélien.

2. - $x \bigotimes y = x \cdot y - 2x - 2y + 6 \in \mathbb{R}$. Donc $\bigotimes$ est une loi interne.
   - $x \bigotimes (y \bigotimes z) = x \cdot y \cdot z - 2(x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x) + 4(x+y+z) - 6 = (x \bigotimes y) \bigotimes z$. Donc $\bigotimes$ est une loi associative.
   - $x \bigotimes y = x \cdot y - 2x - 2y + 6 = y \bigotimes x$. Donc $\bigotimes$ est une loi commutative.
   - $x \bigotimes 3 = x$. Donc 3 est élément neutre pour $\bigotimes$.
   - $\forall x \neq 2,\ x \bigotimes \frac{2x-3}{x-2} = 3$. Donc tout x différent du neutre de la loi $\bigoplus$ est inversible (d'inverse $\frac{2x-3}{x-2}$) par $\bigotimes$.
   - $x \bigotimes (y \bigoplus z) = x \cdot y + x \cdot z - 4x - 2(y+z) + 10 = (x \bigotimes y) \bigoplus (x \bigotimes z)$. Donc $\bigotimes$ est une loi distributive par rapport à $\bigoplus$.

Ainsi, $(\mathbb{R}, \bigoplus, \bigotimes)$ est non seulement un anneau commutatif unitaire, mais un corps.

Solution 10 $(A, +, \cdot)$ est un anneau commutatif unitaire intègre et fini. On note 0 le neutre de A pour $+$ et 1 le neutre de A pour $\cdot$.

Soit $\phi_a : x \in A \mapsto a \cdot x \in A$ avec $a \neq 0$.

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

$$\begin{aligned}
\phi_a(x) = \phi_a(y) &\implies a \cdot x = a \cdot y \\
&\implies a \cdot (x - y) = 0 \\
&\implies x - y = 0 \text{ car } A \text{ est intègre et } a \neq 0 \\
&\implies x = y
\end{aligned}$$

Ainsi, ϕ_a est injective.

Mais, comme A est fini, si ϕ_a est injective, ϕ_a est aussi bijective.

Donc, il existe un unique y tel que $a \cdot y = 1$ car ϕ_a est surjective, donc tout élément non nul de A est inversible et A est un corps.

Solution 13 Les endomorphismes du corps $\mathbb{R}$ sont les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

L'application f identiquement nulle convient.

De $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, il vient directement que $f(0) = 0$.

De $f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1)$, il vient directement que $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$.

- Premier cas : $f(1) = 0$.
  Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{f(x \times 1)}_{=f(x)} = f(x) \times \underbrace{f(1)}_{=0} = 0$ et f est l'application identiquement nulle.
- Deuxième cas : $f(1) = 1$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$, on montre aisément par récurrence que $f(n) = n$ (car $f(n+1) = f(n) + \underbrace{f(1)}_{=1}$).
  Soit $p \in -\mathbb{N}$, on a $\underbrace{f(p + (-p))}_{=f(0)=0} = f(p) + \underbrace{f(-p)}_{=-p}$ puis $f(p) = p$. Ainsi, $\forall p \in \mathbb{Z}, f(p) = p$.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\underbrace{f(n \times \frac{1}{n})}_{=f(1)=1} = \underbrace{f(n)}_{=n} \times f(\frac{1}{n})$ puis $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$.
  Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(\frac{p}{n}) = \underbrace{f(p)}_{=p} \times \underbrace{f(\frac{1}{n})}_{=\frac{1}{n}} = \frac{p}{n}$. Ainsi, $\forall q \in \mathbb{Q}, f(q) = q$.
  On montre maintenant que f est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$: si $x > 0$, $f(x) = f(\sqrt{x}) \times f(\sqrt{x}) = (f(\sqrt{x}))^2 > 0$.
  On en déduit que f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$: si $a > b$, alors $a - b > 0$, puis $f(a - b) > 0$, puis $f(a) > f(b)$ et f est une fonction strictement croissante.
  Maintenant on conclut que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$ par un critère de densité ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$) :
  $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0, \exists r_1 \in \mathbb{Q}, \exists r_2 \in \mathbb{Q}$ tels que $r_1 < x < r_2$ et $r_2 - r_1 < \varepsilon$, puis par croissance de f, $\underbrace{f(r_1)}_{=r_1} < f(x) < \underbrace{f(r_2)}_{=r_2}$ et $f(x)$ (tout comme x) est dans l'intervalle $]r_1, r_2[$, ce qui conduit à $|f(x) - x| < \varepsilon$, puis à $x = f(x)$ en faisant tendre ε vers 0.