Algèbre
Arithmétique

Denis Vekemans [*]

Exercice 1 Calculer le $PGCD$

- de 288 et 1024.
- de 33055 et 12621.

Exercice 2 Trouver $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ tels que

- $275a + 312b = 1$.
- $126a + 75b = 3$.
- $11a + 5b = 8$.

Donner une infinité de solutions.

Exercice 3 Trouver tous les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que le $PGCD$ de a et b soit 50 et que le $PPCM$ de a et b soit 600.

Exercice 4 THÉORÈME DE GAUSS. Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$.

Si a et b sont premiers entre eux et si a divise le produit bc, alors a divise c.

Exercice 5 Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$.

Montrer que si b et c sont premiers entre eux, si b divise a et si c divise a, alors le produit bc divise a.

Exercice 6 Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$.

Montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors le $PGCD$ de a et bc est égal au $PGCD$ de a et c.

Exercice 7 Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 8 Montrer que tout $n \in \mathbb{N}$ composé (i.e. qui est produit de deux nombres distincts de 1) admet un diviseur distinct de 1 inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

[*]Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Exercice 9 Soit p un nombre premier et $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$.

Montrer que ou bien p divise a ou bien p est premier avec a.

Montrer que si p divise le produit ab, alors ou bien p divise a ou bien p divise b.

Exercice 10 Montrer que $2^n + 1$ et $2^{n+1} + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 11 Soit la suite (u_n) donnée par $u_n = 2^n + 3^n$. Donner en fonction de n le $PGCD$ de p_n et p_{n+2}.

Exercice 12 Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. On suppose que m divise $(m-1)! + 1$. Montrer que m est premier.

Exercice 13 Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. On suppose que $2^m - 1$ est premier. Montrer que m est premier.

Exercice 14 Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le $PGCD$ de $n^3 + n$ et $2n + 1$?

Exercice 15 Soit la suite de Fibonnacci (F_n) donnée par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Montrer que

$$F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n.$$

En déduire que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 16 Déterminer le groupe multiplicatif G_n des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Application à G_{15}.

Exercice 17 Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on appelle $\phi(m)$ le nombre des entiers naturels inférieurs ou égaux à m et premiers avec m.

1. Montrer que $\phi(m)$ est le nombre des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
2. En déduire que si m et n sont premiers entre eux, on a :

$$\phi(m \cdot n) = \phi(m) \cdot \phi(n).$$

3. Si m est décomposé en produit de facteurs premiers $m = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, montrer que

$$\phi(m) = m \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{p_k}).$$

Références

[1] M. Gran, *fiches de TD (L1)*, Université du Littoral Côte d'Opale.

[2] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 1. Algèbre*, Belin, Collection DIA, 1987.

[3] D. Duverney, S. Heumez, G. Huvent, *Toutes les mathématiques – Cours, exercices corrigés – MPSI, PCSI, PTSI, TSI*, Ellipses, 2004.