Algèbre
Corps des nombres complexes

Denis Vekemans *

Exercice 1 Pour chacun des nombres complexes suivants, donner les parties réelles et imaginaires, le module et l'argument.

(a) $3+4\imath$; (b) $\frac{1}{2}(1+\imath)(1+\imath^{-8})$; (c) $\frac{1}{\imath}$;
(d) $\frac{\imath+1}{\imath-1}$; (e) $\frac{\imath-1}{(\imath+1)^2}$; (f) $3e^{8\imath}$;
(g) $3\imath+2e^{\imath\pi}$.

Exercice 2 Calculer l'inverse et le carré des nombres complexes $1+5\imath$ et $\frac{1+\imath}{\sqrt{2}}$.

Exercice 3 Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

(a) $\exp(\bar{z}) = \overline{(\exp z)}$; (b) $|\exp z| = \exp(\Re(z))$.

Exercice 4 Linéariser

$$\sin^3(2t)\cos^2(t).$$

Exercice 5 (a) Trouver les racines cubiques de $-\imath$;

(b) Trouver les racines quatrièmes de -16 ;

(c) Trouver les racines $n^{\text{èmes}}$ de 2^n.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

(a) $z^2 = \frac{1+\imath}{\sqrt{2}}$; (b) $z^3 = \frac{1+\imath\sqrt{3}}{1-\imath\sqrt{3}}$; (c) $z^2-(3+4\imath)z-1+5\imath=0$;

$$(d)\ 27(z-1)^6+(z+1)^6=0.$$

Exercice 7 Indiquer sur un dessin les parties du plan contenant les points représentatifs des complexes qui satisfont aux conditions suivantes

(a) $|z-3\imath|=5$; (b) $z+\bar{z}=1$; (c) $z+\bar{z}=|z|^2$;

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

(d) $\frac{z}{\bar{z}} = i$; (e) $z - z\bar{z} = z\bar{z} - z$; (f) $\left|\frac{z-1}{z-2}\right| < 1$;

Exercice 8 Soit P un polynôme à coefficients réels.

(a) Montrer que pour un complexe quelconque z on a $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$.

(b) Déduisez-en que si P admet z comme racine, il admet aussi $\bar{z}$ comme racine.

(c) Sachant que $\sqrt{3} - \imath$ est racine de $x^3 + (3 - 2\sqrt{3})x^2 + (4 - 6\sqrt{3})x + 12$, trouver les autres racines.

Exercice 9 (Partiel 2005) Soit $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ le corps des nombres complexes.

On appelle automorphisme de corps un automorphisme d'anneau unitaire d'un corps dans lui-même.

Les questions suivantes sont indépendantes ...

(a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^6 = -1$.

(b) Calculer dans $\mathbb{C}$ le nombre complexe $(\frac{1+\imath\sqrt{3}}{1-\imath\sqrt{3}})^{10}$.

(c) L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(a + \imath b) = a - \imath b$ est-elle un automorphisme de corps ?

(d) L'application $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $g(a + \imath b) = 2(a - \imath b)$ est-elle un automorphisme de corps ?

Exercice 10 Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(z + 1)^n = e^{2\imath na}.$$

En déduire, pour tout entier n naturel non nul, la valeur de

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right).$$

Exercice 11 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer pour $\theta \neq 0$, $\sum_{k=0}^{n} e^{k\imath\theta}$.

En déduire que pour $\theta \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \cos(\frac{n\theta}{2})\frac{\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})},$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta) = \sin(\frac{n\theta}{2})\frac{\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}.$$

Prolonger ces formules pour $\theta = 0$.

Exercice 12 Soient $(p, q) \in \mathbb{R}$. On se propose de résoudre l'équation du troisième degré $(E)\ :\ x^3 + px + q = 0$ par la méthode de Cardan (1501-1576).

L'idée est de chercher x sous la forme $x = u + v$ en imposant la condition $(C)\ :\ 3uv + p = 0$.

1. Démontrer que u vérifie $u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$.
2. Résoudre cette équation.
3. En déduire les trois racines de (E) dans $\mathbb{C}$.

Références

[1] M. Gran, *fiches de TD (L1)*, Université du Littoral Côte d'Opale.

[2] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 1. Algèbre*, Belin, Collection DIA, 1987.

[3] D. Duverney, S. Heumez, G. Huvent, *Toutes les mathématiques – Cours, exercices corrigés – MPSI, PCSI, PTSI, TSI*, Ellipses, 2004.