Algèbre
Corps des complexes

Denis Vekemans [*]

Solution 1 (g) : $z = 3\imath + 2\underbrace{\exp(\imath\pi)}_{=-1} = 3\imath - 2$; $\Re(z) = -2$; $\Im(z) = 3$; $|z| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$; et $\arg(z) = \arctan(\frac{-3}{2}) + \pi$.

Solution 3

1. $\exp(\overline{z}) = \overline{(\exp z)}$?

$$\begin{aligned} z = a + \imath b &\Longrightarrow \overline{z} = a - \imath b \\ &\Longrightarrow \exp(\overline{z}) = \exp(a - \imath b) = \exp(a)\exp(-\imath b) \end{aligned}$$

$$z = a + \imath b \quad\Longrightarrow\quad \overline{exp(z)} = \overline{\exp(a+\imath b)} = \overline{\exp(a)\exp(\imath b)} = \overline{\exp(a)}\ \overline{\exp(\imath b)} = exp(a)\exp(-\imath b)$$

2. $|\exp z| = \exp(\Re(z))$?

$$\begin{aligned} z = a + \imath b &\Longrightarrow \exp(z) = \exp(a+\imath b) = \exp(a)\exp(\imath b) \\ &\Longrightarrow |\exp z| = |\exp(a)|\,|\exp(\imath b)| = |\exp(a)| = \exp(a) = \exp(\Re(z)). \end{aligned}$$

Solution 6 (b)

$$(E)\ :\ z^3 = \frac{1+\imath\sqrt{3}}{1-\imath\sqrt{3}} = \frac{2\exp(\frac{\imath\pi}{3})}{2\exp(\frac{-\imath\pi}{3})} = \exp(\frac{2\imath\pi}{3}).$$

Une solution particulière de l'équation (E) est donc $z_0 = \exp(\frac{2\imath\pi}{9})$ (racine cubique du module, argument divisé par 3).

Puis, les racines de (E) sont données par $z_k = z_0\exp(\frac{2\imath k\pi}{3})$ pour $k \in \{0,1,2\}$. Ceci donne $z_0 = \exp(\frac{2\imath\pi}{9})$, $z_1 = \exp(\frac{8\imath\pi}{9})$ et $z_2 = \exp(\frac{14\imath\pi}{9})$.

[*]Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

(d)

$$(E)\ :\ 27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0.$$

On réécrit cela $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -27$ et en posant $Z = \frac{z+1}{z-1}$, on est ramené à chercher Z comme racine sixième de $-27 = 27\exp(\imath\pi)$.

Une solution particulière de l'équation (E) est donc $Z_0 = \sqrt{3}\exp(\frac{\imath\pi}{6})$ (racine sixième du module, argument divisé par 6).

Puis, les racines de (E) sont données par $Z_k = Z_0\exp(\frac{2\imath k\pi}{6}) = \sqrt{3}\exp(\frac{\imath(2k+1)\pi}{6})$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$.

Ceci donne :

$Z_0 = \sqrt{3}\exp(\frac{\imath\pi}{6}) = \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \imath\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$Z_1 = \sqrt{3}\exp(\frac{\imath\pi}{2}) = \imath\sqrt{3}$,
$Z_2 = \sqrt{3}\exp(\frac{5\imath\pi}{6}) = \sqrt{3}(\frac{\sqrt{-3}}{2} + \imath\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$Z_3 = \sqrt{3}\exp(\frac{7\imath\pi}{6}) = \sqrt{3}(\frac{\sqrt{-3}}{2} + \imath\frac{-1}{2}) = -\frac{3}{2} - \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$Z_4 = \sqrt{3}\exp(\frac{3\imath\pi}{2}) = -\imath\sqrt{3}$, et
$Z_5 = \sqrt{3}\exp(\frac{11\imath\pi}{6}) = \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \imath\frac{-1}{2}) = \frac{3}{2} - \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'autre part,

$$\frac{z+1}{z-1} = Z \Longleftrightarrow z \quad = \quad \frac{Z+1}{Z-1}$$

Puis,

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{Z_0+1}{Z_0-1} \\ &= \frac{\frac{3}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{\frac{3}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}-1} \\ &= \frac{\frac{5}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\frac{5}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}\ \frac{\frac{1}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= 2-\imath\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{Z_1+1}{Z_1-1} \\ &= \frac{\imath\sqrt{3}+1}{\imath\sqrt{3}-1} \\ &= \frac{\imath\sqrt{3}+1}{\imath\sqrt{3}-1}\ \frac{-\imath\sqrt{3}-1}{-\imath\sqrt{3}-1} \\ &= \frac{2-2\imath\sqrt{3}}{4} = \frac{1-\imath\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_2 &= \frac{Z_2+1}{Z_2-1} \\
&= \frac{-\frac{3}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{-\frac{3}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}-1} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{5}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{5}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}\,\frac{-\frac{5}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{5}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{2-\imath\sqrt{3}}{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_3 &= \frac{Z_3+1}{Z_3-1} \\
&= \frac{-\frac{3}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{-\frac{3}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}-1} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{5}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{5}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}\,\frac{-\frac{5}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{5}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{2+\imath\sqrt{3}}{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_4 &= \frac{Z_4+1}{Z_4-1} \\
&= \frac{-\imath\sqrt{3}+1}{-\imath\sqrt{3}-1} \\
&= \frac{-\imath\sqrt{3}+1}{-\imath\sqrt{3}-1}\,\frac{\imath\sqrt{3}-1}{\imath\sqrt{3}-1} \\
&= \frac{2+2\imath\sqrt{3}}{4} = \frac{1+\imath\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_5 &= \frac{Z_5+1}{Z_5-1} \\ &= \frac{\frac{3}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{\frac{3}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}-1} \\ &= \frac{\frac{5}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\frac{5}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}\,\frac{\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= 2+\imath\sqrt{3} \end{aligned}$$

Solution 7

$$\begin{aligned} (a)\ A &= \{M(z) \text{ tels que } |z-3\imath| = 5\} \\ &= \{M \text{ tels que } MM_A = 5 \text{ où } M_A(3\imath)\} \\ &= \mathcal{C}(M_A, 5) \text{ où } M_A(3\imath). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b)\ B &= \{M(z) \text{ tels que } z+\bar{z} = 1\} \\ &= \{M(z) \text{ tels que } 2\Re(z) = 1\} \\ &= D_B \text{ où } D_B\ :\ x = \frac{1}{2} \text{ si } z = x+\imath y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c)\ C &= \{M(z) \text{ tels que } z+\bar{z} = |z|^2\} \\ &= \{M(x+\imath y) \text{ tels que } 2x = x^2+y^2\} \\ &= \{M(x+\imath y) \text{ tels que } 1 = (x-1)^2+y^2\} \\ &= \mathcal{C}(M_C, 1) \text{ où } M_C(1). \end{aligned}$$

Solution 8

1. $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ est un polynôme à coefficients réels (i.e. $a_i \in \mathbb{R}$).
   Donc, $\overline{P(z)} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i z^i} = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\overline{a_i}}_{=a_i \text{ car } a_i\in\mathbb{R}} \overline{z^i} = \sum_{i=0}^{n} a_i\ \overline{z}^i = P(\overline{z})$.
2. Si $P(z) = 0$, alors $\overline{P(z)} = 0$ et d'après la première question, $P(\overline{z}) = 0$. Ainsi, si z est racine de P, $\bar{z}$ est aussi racine de P.
3. $\sqrt{3}-\imath$ est racine de $p(x) = x^3+(3-2\sqrt{3})x^2+(4-6\sqrt{3})x+12$, donc, d'après la deuxième question, $\overline{\sqrt{3}-\imath} = \sqrt{3}+\imath$ aussi.

Ainsi, $p(x)=(x-(\sqrt{3}-\imath))(x-(\sqrt{3}+\imath))(x-\alpha)$ où on cherche $\alpha\in\mathbb{R}$ (un polynôme réel de degré 3 admet forcément une racine réelle d'apprès les limites en l'infini et le théorème des valeurs intermédiaires).

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-(\sqrt{3}-\imath))(x-(\sqrt{3}+\imath))(x-\alpha) \\ &= x^3+(-2\sqrt{3}-\alpha)x^2+((-\sqrt{3}+\imath)(-\sqrt{3}-\imath)+2\sqrt{3}\alpha)x-(-\sqrt{3}+\imath)(-\sqrt{3}-\imath)\alpha \end{aligned}$$

En identifiant les termes en x^2 dans les deux expressions de $p(x)$, on trouve $\alpha=-3$ et une vérification confirme ce résultat !

Solution 10 L'équation $(z+1)^n=\exp(2\imath na)$, admet pour solutions z_k telles que

$$z_k+1=\exp(2\imath a+\frac{2\imath k\pi}{n})$$

pour $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$.

Le produit de ces racines est

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} z_k &= (-1)^n\,(1-\exp(2\imath na)) \\ &= (-1)^{n+1}\exp(\imath na)\,(\exp(\imath na)-\exp(-\imath na)) \\ &= 2\imath(-1)^{n+1}\exp(\imath na)\sin(na) \end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1}\frac{\exp(\imath a+\frac{\imath k\pi}{n})-\exp(-\imath a-\frac{\imath k\pi}{n})}{2\imath} \\ &= \frac{1}{2^n\imath^n}\prod_{k=0}^{n-1}\underbrace{\exp(-\imath a-\frac{\imath k\pi}{n})}_{=\exp(-\imath a)\exp(-\frac{\imath k\pi}{n})}\left(\underbrace{\exp(2\imath a+\frac{2\imath k\pi}{n})-1}_{=z_k}\right) \\ &= \frac{\exp(-\imath na)}{2^n\imath^n}\;\underbrace{\exp(\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{-\imath k\pi}{n}}_{=\frac{-\imath(n-1)n\pi}{2n}})}_{=(-\imath)^{n-1}}\prod_{k=0}^{n-1}z_k \\ &= \frac{\exp(-\imath na)}{2^n\imath^n}\;(-\imath)^{n-1}2\imath(-1)^{n+1}\exp(\imath na)\sin(na) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\sin(na) \end{aligned}$$

Solution 12

1. On a $x^3+px+q=0$. En posant $x=u+v$, on obtient $u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+p(u+v)+q=0$, puis $u^3+v^3+(u+v)(3uv+p)+q=0$. Puis, en injectant $3uv+p=0$, on extrait $u^6+qu^3-\frac{p^3}{27}=0$ (on a remplacé u par $\frac{-p}{3v}$).
2. Si on pose $U=u^3$, on obtient $U^2+qU-\frac{p^3}{27}=0$.
   Premier cas : $\Delta=q^2+\frac{4p^3}{27}>0$, on a $U\in\{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2},\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}\}$, puis
   $$u\in\{\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}},\jmath\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}},\bar{\jmath}\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}},\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}},\jmath\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}},\bar{\jmath}\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}\}.$$
   Deuxième cas : $\Delta=q^2+\frac{4p^3}{27}<0$, on a $U\in\{\frac{-q+\imath\sqrt{-\Delta}}{2},\frac{-q-\imath\sqrt{-\Delta}}{2}\}$, puis si ω est une racine cubique de $\frac{-q+\imath\sqrt{-\Delta}}{2}$ (ou de façon équivalente) $\bar{\omega}$ est une racine cubique de $\frac{-q-\imath\sqrt{-\Delta}}{2}$)
   $$u\in\{\omega,\jmath\omega,\bar{\jmath}\omega,\bar{\omega},\jmath\bar{\omega},\bar{\jmath}\bar{\omega}\}.$$
   Troisième cas : $\Delta=q^2+\frac{4p^3}{27}=0$, on a $U=\frac{-q}{2}$, puis
   $$u\in\{\sqrt[3]{\frac{-q}{2}},\jmath\sqrt[3]{\frac{-q}{2}},\bar{\jmath}\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}\}.$$
3. Par symétrie, il est évident que v vérifie $v^6+qv^3-\frac{p^3}{27}=0$. Donc, suivant les différents cas, u et v doivent être choisis dans les mêmes ensembles. On finit en utilisant la propriété $uv\in\mathbb{R}$ (car $uv=\frac{-p}{3}$) et si nécessaire la valeur de ce produit.
   Premier cas : $\Delta=q^2+\frac{4p^3}{27}>0$,
   - $x=u+v=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}\in\mathbb{R}$ ou
   - $x=u+v=\jmath\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}+\bar{\jmath}\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ou
   - $x=u+v=\bar{\jmath}\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}+\jmath\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

   Deuxième cas : $\Delta=q^2+\frac{4p^3}{27}<0$,
   - $x=u+v=\omega+\bar{\omega}\in\mathbb{R}$, ou
   - $x=u+v=\jmath\omega+\bar{\jmath}\bar{\omega}\in\mathbb{R}$, ou
   - $x=u+v=\jmath\bar{\omega}+\bar{\jmath}\omega\in\mathbb{R}$.

   Troisième cas : $\Delta=q^2+\frac{4p^3}{27}=0$, on a $U=\frac{-q}{2}$, puis
   - $x=u+v=2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}\in\mathbb{R}$, ou
   - $x=u+v=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}\in\mathbb{R}$ qui est racine double.

Remarque : on a noté $\sqrt[3]{a}$ pour l'unique racine cubique réelle de a.