Algèbre
Espaces vectoriels

Denis Vekemans *

Exercice 1 L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des lois suivantes est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

(1) $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.
(2) $(x, y) + (x', y') = (y + y', x + x')$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.
(3) $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x, y)$.
(4) $(x, y) + (x', y') = (0, 0)$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.
(5) $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x, 0)$.

Exercice 2 Soit $\mathbb{K}$ un corps. On définit sur $\mathbb{K}^n$ l'opération $+$ par

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$

Montrer que $\mathbb{K}^n$, muni de ces opérations, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exercice 3 Soit E l'ensemble des suites réelles. Montrer que E, muni des opérations naturelles : addition des suites et multiplication d'une suite par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 Les sous-ensembles F suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

(1) $F = \mathbb{Z}^2$.
(2) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ |x| = |y|\}$.
(3) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x + 2y = 0\}$.

Exercice 5 (1) On considère le sous-ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ y = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
(b) Le complémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

(2) Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.
Le complémentaire de F dans E peut-il être un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 6 Soit E l'ensemble des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles, continues sur $[0,1]$.

Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (pour l'addition des fonctions et la multiplication d'une fonction par un réel).

On considère les sous-ensembles suivants de E ; préciser ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E :

(1) les fonctions f qui vérifient $2f(0) = f(1)$;
(2) les fonctions f qui vérifient $f(1) = f(0) + 1$;
(3) les fonctions f qui vérifient $f(x) = f(1-x), \forall x \in [0,1]$;
(4) les fonctions qui sont monotones sur $[0,1]$;
(5) les fonctions f qui vérifient $x^2 f^{(3)}(x) - f(x) = 0, \forall x \in [0,1]$;
(6) les fonctions polynômes de degré 4 ;
(7) les fonctions polynômes de degré au plus égal à 4 ou nulles ;
(8) les fonctions polynômes p de degré au plus égal à 3 ou nulles telles que $p(1) = p(2) = 0$.
(9) les fonctions polynômes p de degré au plus égal à 2 ou nulles telles que $\int_0^1 p(t)dt = 0$.
(10) les fonctions polynômes p de degré au plus égal à 3 ou nulles telles que $p'(2) = p''(2) = 0$.

Exercice 7 Soit E l'ensemble des suites réelles.

Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (pour l'addition des suites réelles et la multiplication d'une suite réelle par un réel).

On considère les sous-ensembles suivants de E ; préciser ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E :

(1) les suites (u_n) qui sont bornées ;
(2) les suites (u_n) qui sont arithmétiques ;
(3) les suites (u_n) qui sont géométriques ;
(4) les suites (u_n) qui sont géométriques de raison -2 ;
(5) les suites (u_n) qui sont périodiques ;
(6) les suites (u_n) qui vérifient $u_{n+3} = u_{n+2} - u_n$.

Exercice 8 On considère les deux sous-espaces vectoriels $F = \langle(1,1,0);(0,1,-2)\rangle$ et $G = \langle(2,1,2);(1,0,2)\rangle$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $F = G$.

Exercice 9 Soient $u = (1,1,1,1)$ et $v = (1,2,3,4)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Déterminer a et b pour que $w = (1,-1,a,b)$ appartienne au sous-espace vectoriel engendré par u et v.

Exercice 10 Les sous-espaces vectoriels $E = \langle(3,0,1,2)\rangle$ et $F = \{(x,y,z,t) \text{ tels que } x + 3y - z + 2t = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 11 Dans chacun des cas suivants, déterminer le sous-espace vectoriel engendré par A dans l'espace

vectoriel E, et donner un supplémentaire de A dans E.
(1) $E = \mathbb{R}^2$ et $A = \{(0,1)\}$.
(2) $E = \mathbb{R}^3$ et $A = \{(1,0,0),(1,1,0)\}$.

Exercice 12 Pour chacune des familles de $\mathbb{R}^2$ suivantes, dire si elle est génératrice, libre ou si elle constitue une base de $\mathbb{R}^2$.
(1) $\mathcal{F}_1 = \{(2,1),(4,1)\}$.
(2) $\mathcal{F}_2 = \{(-1,2),(4,3),(6,-1)\}$.
(3) $\mathcal{F}_3 = \{(2,-3),(1,5),(0,0)\}$.
(4) $\mathcal{F}_4 = \{(1,1)\}$.

Exercice 13 Soit $u = (2,1,1)$, $v = (1,3,1)$ et $w = (-2,1,3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Montrer qu'ils constituent une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur $t = (1,1,1)$ dans cette base.

Exercice 14

$$\mathcal{F} = \{(1,1,1),(2,0,-1),(-1,1,2),(3,1,0)\}.$$

1. La famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre ?
2. Déterminer une base du sous-espace F engendré par la famille $\mathcal{F}$.
3. Quelle est la dimension de F ?

Exercice 15 Soit F l'ensemble des vecteurs $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une base de F et en déduire $\dim F$.

Exercice 16 Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle u a pour composantes $(y+z, x+z, x+y)$?

Exercice 17 Montrer que la famille $\mathcal{F}$ suivante de polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\mathcal{F} = \{(X+1, X^2, X(X-1)\}.$$

Soit le polynôme $aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Calculer, ses composantes dans la base $\mathcal{F}$.

Exercice 18 Donner une base de l'espace vectoriel

1. $$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tels que } x+y=y+z=0\right\}.$$

2. $$\{P\in\mathbb{R}_3[x] \text{ tels que } P(x)=P(1-x)\}.$$

3. $$\{u=(u_n) \text{ telles que } u_n\in\mathbb{R} \text{ et } u_n+u_{n+2}=0\}.$$

Exercice 19 Soient a, b et c trois réels distincts. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle le polynôme P a pour composantes $\big(P(a),P'(b),P''(c)\big)$.

Exercice 20

1. A quelle condition sur le réel a, la famille $\mathcal{F}$ suivante de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
$$\mathcal{F}=\{(a,1,1),(1,a,1),(1,1,a)\}.$$

2. A quelle condition sur les réels a, b, c, la famille $\mathcal{F}$ suivante de polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?
$$\mathcal{F}=\{(X-a)^2,(X-b)^2,(X-c)^2\}.$$

Exercice 21 Dans l'espace vectoriel des suites numériques réelles, quel est le rang du système (u,v,w,x,y) où
$$u=(2^n)_n\ ;\ v=(3^n)_n\ ;\ w=(2^n+3^n)_n\ ;\ x=(2^{n+1}+3^{n+1})_n\ ;\ y=(2^{2n}+3^{2n})_n\ ?$$

Exercice 22 Dans l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, quel est le rang du système (f_1,f_2,f_3) où
$$f_1(x)=\sin(x+1)\ ;\ f_2(x)=\sin(x+2)\ ;\ f_3(x)=\sin(x+3)\ ?$$

Exercice 23 Dans l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, quel est le rang du système (f_1,f_2,f_3) où
$$f_1(x)=\sin(x)\ ;\ f_2(x)=\sin(\sin(x))\ ;\ f_3(x)=\sin(\sin(\sin(x)))\ ?$$

Exercice 24 Dans l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, quel est le rang du système (f_1,f_2,f_3,f_4) où
$$f_1(x)=e^x\ ;\ f_2(x)=e^{-x}\ ;\ f_3(x)=\cosh(x)\ ;\ f_4(x)=\sinh(x)\ ?$$

Exercice 25 Dans l'espace vectoriel des fonctions continues de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$, quel est le rang du système (f_1, f_2, f_3, f_4) où

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \; ; \; f_2(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \; ; \; f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; ; \; f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \; ?$$

Exercice 26

1. Dans l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que le système $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ où

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \; f_k(x) = \cos^k(x)$$

   est de rang $n+1$.

2. (a) Calculer $I_{p,q} = \int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)dx$ pour $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$.

   (b) Dans l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que le système $(g_0, g_1, \ldots, g_n)$ où

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \; g_k(x) = \cos(kx)$$

   est de rang $n+1$.

3. Montrer que

$$\langle f_k, k \in \{0, 1, \ldots, n\}\rangle = \langle g_k, k \in \{0, 1, \ldots, n\}\rangle .$$

Exercice 27 Soit $\mathbb{K}$ un corps et soit $n \geq 1$.

Pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, on définit $e_k = \begin{pmatrix} e_k(1) \\ \vdots \\ e_k(n) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ en posant

$$e_k(j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\{e_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée *base canonique de* $\mathbb{K}^n$.

Exercice 28 Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

(1) Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(2) Supposons que $E = \mathbb{R}^2$, $F = \langle(1,0)\rangle$ et $G = \langle(0,1)\rangle$.
L'ensemble $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

(3) Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 29 Soit E un espace vectoriel et A, B et C trois sous-espaces de E. Montrer que si $A+C = B+C$, $A \cap C = B \cap C$ et $A \subset B$, alors $A = B$.

Exercice 30 Soit E un espace vectoriel et A, B et C trois sous-espaces de E.

1. Montrer que $A + (B \cap C) \subset (A + B) \cap (A + C)$. Justifier que l'inclusion est stricte.
2. Vérifier qu'il existe une inclusion entre les ensembles $A \cap (B + C)$ et $(A \cap B) + (A \cap C)$. Justifier que l'inclusion est stricte.

Exercice 31 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soient F et G deux sous espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 32 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie 4 et soient F et G deux sous espaces vectoriels de E de dimension 3 tels que $F \neq G$. Déterminer la dimension de $F \cap G$.

Références

[1] M. Gran, *fiches de TD (L1)*, Université du Littoral Côte d'Opale.

[2] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 1. Algèbre*, Belin, Collection DIA, 1987.

[3] D. Duverney, S. Heumez, G. Huvent, *Toutes les mathématiques – Cours, exercices corrigés – MPSI, PCSI, PTSI, TSI*, Ellipses, 2004.