Algèbre
Espaces vectoriels

Denis Vekemans *

Solution 14

1. Dire que la famille $\mathcal{F}$ est libre est d'ores et déjà absurde pour une raison de dimensions : l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$ serait de dimension 4 (engendré par 4 vecteurs) et $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3.

   On tente alors de voir comment ils sont liés ...

   – On a $(1,1,1)-(2,0,-1)=(-1,1,2)$ ce qui induit que le vecteur $(-1,1,2)$ est dans l'espace vectoriel engendré par $\{(1,1,1),(2,0,-1)\}$.
   – On a $(1,1,1)+(2,0,-1)=(3,1,0)$ ce qui induit que le vecteur $(3,1,0)$ est dans l'espace vectoriel engendré par $\{(1,1,1),(2,0,-1)\}$.

   Enfin, les vecteurs $(1,1,1)$ et $(2,0,-1)$ sont effectivement libres car si pour tout couple (α,β) de réels, $\alpha(1,1,1)+\beta(2,0,-1)=0$, alors $\alpha=0$ (d'après la deuxième coordonnée), puis $\beta=0$ (par exemple d'après la première coordonnée en réinjectant $\alpha=0$).

   En conclusion, l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$ peut être noté $F=\langle(1,1,1),(2,0,-1)\rangle$. **La famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre**, mais la famille $\{(1,1,1),(2,0,-1)\}$ l'est.

2. **La famille** $\{(1,1,1),(2,0,-1)\}$ étant libre, (et évidemment, elle est génératrice de l'espace qu'elle génère –tautologique[1]–), c'**est** donc **une base** de l'espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F}$ ou encore par la famille $\{(1,1,1),(2,0,-1)\}$ (puisque ces deux familles engendrent le même espace vectoriel).

3. La dimension de l'espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F}$ est donné par le nombre de vecteurs de sa base, soit 2.

Solution 18 (3)

$$F=\{u=(u_n) \text{ telles que } u_n\in\mathbb{R} \text{ et } u_n+u_{n+2}=0\}.$$

L'ensemble F est entièrement déterminé par ses deux premiers éléments c'est-à-dire que l'application ϕ de F dans $\mathbb{R}^2$ qui à $u=(u_n)$ associe (u_0,u_1) est bijective.

En effet,

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

[1]La tautologie (du grec tauto logos, le fait de redire la même chose) est une phrase ou un effet de style ainsi tournée que sa formulation ne peut être que vraie. La tautologie peut aussi s'apparenter au truisme ou à une lapalissade.

- ϕ est **surjective** car pour toute $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$, il existe $u \in F$
  (à savoir $u = (u_0, u_1, -u_0, -u_1, u_0, u_1, -u_0, -u_1, u_0, u_1, -u_0, -u_1, \ldots)$ (par récurrence)) telle que $\phi(u) = (u_0, u_1)$.
- ϕ est **injective** car si on considère $u = (u_n) \in F$ et $v = (v_n) \in F$, telles que $\phi(u) = \phi(v)$, alors $(u_0, u_1) = (v_0, v_1)$ ou encore $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. Dans ce cas, on a $u_{2n} = (-1)^n u_0 = (-1)^n v_0 = v_{2n}$ et $u_{2n+1} = (-1)^n u_1 = (-1)^n v_1 = v_{2n+1}$ (par récurrence) et $u = v$ (les termes de rang pair (respectivement impair) sont égaux).

En conclusion, il suffit de trouver une base de $\mathbb{R}^2$ et de lui appliquer ϕ^{-1} (qui existe car ϕ est bijective) pour obtenir une base de F.

Prenons $\{(1,0),(0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a alors

$$\phi^{-1}(1,0) = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots)$$

et

$$\phi^{-1}(0,1) = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots).$$

Puis,

$$\{(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots), (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots)\}$$

est une base de F.

Remarque :

$$\begin{aligned} F &= \{\lambda\phi^{-1}(1,0) + \mu\phi^{-1}(0,1) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\lambda, \mu, -\lambda, -\mu, \lambda, \mu, -\lambda, -\mu, \lambda, \mu, -\lambda, -\mu, \ldots) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Solution 25

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \ ; \ f_2(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \ ; \ f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ ; \ f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ainsi, il vient $f_3 - f_4 = f_1$ et $f_3 + f_4 = f_2$. D'où $f_1 \in \langle f_3, f_4 \rangle$ et $f_2 \in \langle f_3, f_4 \rangle$.

D'autre part, le système $\{f_3, f_4\}$ est libre :
$\alpha f_3 + \beta f_4 = 0$ implique $\{$ $\alpha = 0$ (valeur en $x = 0$) *et* $\frac{5}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta = 0$ (valeur en $\frac{3}{5}$) $\}$, ce qui équivaut à $\alpha = \beta = 0$.

Donc, le système est de rang 2.

Solution 29 On a $A \subset B$. Il reste donc à montrer $B \subset A$.

$\forall b \in B, b = b + 0 \in B + C$. Or $B + C = A + C$, donc $b \in A + C$ et $\exists a \in A, \exists c \in C$ tels que $b = a + c$.

Cependant, $c = b - a$ avec $b \in B$ et $a \in A \subset B$ donc $c \in B$. Puis, $c \in B \cap C$. Or $B \cap C = A \cap C$, donc $c \in A$.

Enfin, $b = a + c$ avec $a \in A$ et $c \in A$ donc $b \in A$ et $B \subset A$.

Solution 31 $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) > n - \dim(F + G)$.

Comme $\dim(F + G) \leq \dim(E) = n$, on obtient $\dim(F \cap G) > 0$ puis $F \cap G \neq \{0\}$.

Solution 32 $\dim(F + G) \geq \dim F = 3$, donc $\{ \dim(F + G) = 3$ ou $\dim(F + G) = 4 \}$.

- Premier cas : $\dim(F + G) = 3$.

  Si $\dim(F+G) = 3$, alors $\{ F \subset F+G$ et $\dim F = \dim(F+G) \}$, puis $F = F+G$ [1]. Si $\dim(F+G) = 3$, alors $\{ G \subset F + G$ et $\dim G = \dim(F + G) \}$, puis $G = F + G$ [2].

  [1] et [2] induisent que $F = G$, ce qui est exclu par hypothèse. Le premier cas n'a donc pas de raison d'être.
- Second cas : $\dim(F + G) = 4$.

  Si $\dim(F + G) = 4$, alors $\dim(F \cap G) = \underbrace{\dim F}_{=3} + \underbrace{\dim G}_{=3} - \underbrace{\dim(F + G)}_{=4} = 2$.