Algèbre
Applications linéaires

Denis Vekemans *

Exercice 1 Soit f une application de E dans F. Parmi les applications ci-dessous, trouver celles qui sont linéaires. Puis, pour ces dernières, déterminer le noyau et l'image et préciser si elles sont injectives, surjectives ou bijectives.

(1) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ donné. $E = F = \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

(2) $E = F = \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

(3) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (0, 2x + y, x + 3y)$.

(4) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x - y, x + y, xy)$.

(5) $E = F = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, x + y, x - z)$.

(6) $E = F = \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $f(\alpha) = \alpha + 1$.

(7) Soit $\tau \in \mathbb{R}^+$ donné. $E = F = \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $f(\alpha) = \alpha_\tau$, où $\alpha_\tau(x) = \alpha(\tau + x)$.

Exercice 2 (1) Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = (x, 2x + y, y).$$

(a) Montrer que f est linéaire.

(b) Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

(2) Soit g une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$g(x, y, z) = (x + y, 5x - 2y + z).$$

(a) Montrer que g est linéaire.

(b) Déterminer $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$.

(3) Montrer que $g \circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 Soient f et g les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y - z, 2x - y + z),$$

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

et

$$g(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z).$$

(1) Montrer que f est linéaire. Montrer que g est linéaire.

(2) Déterminer le noyau et l'image de f. f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Déterminer le noyau et l'image de g. g est-elle injective ? Est-elle surjective ?

(3) Montrer que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. Montrer que $\ker(g) \oplus \mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 4 Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(P) = (P(-1), P(0), P(1))$. Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exercice 5 Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(P) = (P(-1), P(2))$. Montrer que f est un morphisme d'espaces vectoriels. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 6 Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, f et g les applications de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définies par

$$(\forall P \in \mathbb{R}[X]) \quad (f(P) = P', \ g(P) = X \cdot P).$$

(1) Vérifier que f et g sont linéaires.

(2) Montrer que f est surjective et non injective.

(3) Montrer que g est injective et non surjective.

Exercice 7 Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$(\forall P \in \mathbb{R}_2[X]) \quad (f(P) = (X + 1)P' + P.$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Démontrer que f est inversible et calculer f^{-1}.

Exercice 8 Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x, -3y + 4z, -2y + 3z).$$

(1) Montrer que f est linéaire.

(2) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire que f est bijective.

(3) Calculer $f \circ f$. En déduire l'expression de f^{-1}.

Exercice 9 Soit $a = (a_1, a_2, a_3)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$. Soit L l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3.$$

(1) Montrer que L est un épimorphisme.

(2) Déterminer $\ker(L)$.

Exercice 10 Soit $V = \{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ ; \ \forall n \geq 0,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n\}$.

(1) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(2) Montrer que $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ puis que les suites $(3^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $((-1)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment une base de V.

Exercice 11 Soit E un espace vectoriel et soit p un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$.
Montrer que $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

Exercice 12 Septembre 2004.

On considère les fonctions réelles h_1 et h_2 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_1(x) = e^x, \quad h_2(x) = e^{-x}.$$

On définit l'ensemble

$$E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ tel que } \exists\,(a, b) \in \mathbb{R}^2, f = ah_1 + bh_2\}.$$

(1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(2) Déterminer une base de E et en déduire que $\dim_{\mathbb{R}} E = 2$.

(3) Soit $\phi \ : \ E \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\phi(f) = (f(0), f(1))$. Montrer que ϕ est un isomorphisme.

(4) Soit ψ l'application qui, à une application f de E associe sa dérivée f'.

  (a) Vérifier que ψ est un endomorphisme de E.

  (b) Calculer $\psi \circ \psi$. En déduire que ψ est bijective.

Exercice 13 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 - Id = 0$.

Montrer que $E = \ker(f + Id) \oplus \ker(f - Id)$.

Exercice 14 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 - 3f - 4Id = 0$.

Montrer que $E = \ker(f + Id) \oplus \ker(f - 4Id)$.

Exercice 15 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $b \in \mathbb{R}$ donné. Soit p un projecteur de E donné (i.e. $p^2 = p$).

Résoudre en x l'équation $x + p(x) = b$.

Exercice 16 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $b \in \mathbb{R}$ donné. Soit s une symétrie de E donnée (i.e. $s^2 = Id$).

Résoudre en x l'équation $x + 2s(x) = b$.

Exercice 17 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ donné et soit $u \in E$ donné. Soit f une application linéaire de E dans E telle que $f^3 = Id$.

Résoudre en x l'équation $x + af(x) = u$.

Références

[1] M. Gran, *fiches de TD (L1)*, Université du Littoral Côte d'Opale.

[2] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 1. Algèbre*, Belin, Collection DIA, 1987.

[3] D. Duverney, S. Heumez, G. Huvent, *Toutes les mathématiques – Cours, exercices corrigés – MPSI, PCSI, PTSI, TSI*, Ellipses, 2004.