Algèbre
Applications linéaires

Denis Vekemans [*]

Solution 10 Soit $\Phi\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^2; a = (a_n) \longmapsto (a_0, a_1)$.

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \mu \in \mathbb{R},\ \forall a = (a_n) \in V,\ \forall b = (b_n) \in V$,

   $$\Phi(\lambda a + \mu b) = ((\lambda a + \mu b)_0, (\lambda a + \mu b)_1) = (\lambda a_0, \lambda a_1) + (\mu b_0, \mu b_1) = \lambda(a_0, a_1) + \mu(b_0, b_1) = \lambda\Phi(a) + \mu\Phi(b),$$

   donc Φ est une application **linéaire**.

   Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, si on pose $a_0 = \alpha$ et $a_1 = \beta$, puis qu'on définit a_i pour $i \geq 2$ par $a_i = 2a_{i-1} + 3a_{i-2}$ (récurrence), on obtient une suite $a = (a_n)$ de V telle que $\Phi(V) = (\alpha, \beta)$. Donc Φ est **surjective**. On a $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{R}^2$.

   Soit $a = (a_n) \in V$ un élément de $\ker(\Phi)$, on a alors $\Phi(a) = (0, 0)$, puis $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, et comme pour $i \geq 2$ par $a_i = 2a_{i-1} + 3a_{i-2}$ (récurrence), on déduit pour $i \geq 2$ par $a_i = 0$ (récurrence) puis $a = 0$. Donc, $\ker(\Phi) = \{0\}$ et Φ est **injective**.

   Ainsi, Φ est un **isomorphisme** d'espace vectoriels et $V = \Phi^{-1}(\mathbb{R}^2)$ est par conséquent un espace vectoriel de même dimension que $\mathbb{R}^2$ ($\dim V = \dim \mathbb{R}^2 = 2$).

   Remarque. De plus, si on considère $\{(1, 0), (0, 1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on peut déduire que $\{\Phi^{-1}(1, 0), \Phi^{-1}(0, 1)\}$ est une base de V. [Cette propriété souvent bien utile est ici inutile car $\Phi^{-1}(1, 0)$ et $\Phi^{-1}(0, 1)$ ne sont pas évidents à extraire].

2. $u = ((-1)^n) \in V$ (en effet, $2 * (-1)^{n+1} + 3(-1)^n = (-1)^{n+2}(-2 + 3) = (-1)^{n+2}$) et $v = ((3)^n) \in V$ (en effet, $2(3)^{n+1} + 3(3)^n = (3)^{n+2}(\frac{2}{3} + \frac{3}{9}) = (3)^{n+2}$).

   u et v sont libres : en effet, s'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ et $\nu \in \mathbb{R}$ tels que $\mu u + \nu v = 0$, alors $\mu + \nu = 0$ (pour $n = 0$) et $-\mu + 3\nu = 0$ (pour $n = 1$), ce qui induit aisément que $\mu = \nu = 0$.

   Comme $\dim V = 2$, deux vecteurs libres de V forment forcément une base de V, donc $\{u, v\}$ est une base de V.

   Remarque. De plus, si on considère $\{(1, -1), (1, 3)\}$ comme base de $\mathbb{R}^2$ [il serait aisé de montrer qu'il s'agit effectivement d'une base de $\mathbb{R}^2$], on peut déduire que $\{\Phi^{-1}(1, -1), \Phi^{-1}(1, 3)\}$ est une base de V. $\Phi^{-1}(1, -1) = u$ et $\Phi^{-1}(1, 3) = v$ [ces résultats sont faciles à montrer également (récurrence)].

[*]Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Solution 13

1. $\underline{E \text{ est somme de } \ker(f+Id) \text{ et } \ker(f-Id)}$.

$$x \in \ker(f+Id) \iff (f+Id)(x)=0 \iff f(x)=-x.$$

$$x \in \ker(f-Id) \iff (f-Id)(x)=0 \iff f(x)=x.$$

Si on peut écrire $x \in E$ sous la forme $x=y+z$ avec $y \in \ker(f+Id)$ et $z \in \ker(f-Id)$, alors $f(x)=f(y)+f(z)=-y+z$ puis $y=\frac{x-f(x)}{2}$ et $z=\frac{x+f(x)}{2}$.

Or, on a bien

$$y=\frac{x-f(x)}{2} \implies f(y)=\frac{f(x)-\overbrace{f(f(x))}^{=x}}{2}=-y$$

et

$$z=\frac{x+f(x)}{2} \implies f(z)=\frac{f(x)+\overbrace{f(f(x))}^{=x}}{2}=z$$

donc $y \in \ker(f+Id)$ et $z \in \ker(f-Id)$.

2. La somme est directe. D'autre part, si $x \in \ker(f+Id)$ et si $x \in \ker(f-Id)$, alors d'une part $f(x)=x$ et d'autre part $f(x)=-x$, puis $x=0$.

Solution 14

1. $\underline{E \text{ est somme de } \ker(f+Id) \text{ et } \ker(f-4Id)}$.

$$x \in \ker(f+Id) \iff (f+Id)(x)=0 \iff f(x)=-x.$$

$$x \in \ker(f-4Id) \iff (f-4Id)(x)=0 \iff f(x)=4x.$$

Si on peut écrire $x \in E$ sous la forme $x=y+z$ avec $y \in \ker(f+Id)$ et $z \in \ker(f-4Id)$, alors $f(x)=f(y)+f(z)=-y+4z$ puis $y=\frac{4x-f(x)}{5}$ et $z=\frac{x+f(x)}{5}$.

Or, on a bien

$$y=\frac{4x-f(x)}{5} \implies f(y)=\frac{\overbrace{f(4x)}^{=4f(x)}-\overbrace{f(f(x))}^{=3f(x)+4x}}{5}=\frac{f(x)-4x}{5}=-y$$

et

$$z=\frac{x+f(x)}{5} \implies f(z)=\frac{f(x)+\overbrace{f(f(x))}^{=3f(x)+4x}}{5}=4\frac{f(x)+x}{5}=4z$$

donc $y \in \ker(f+Id)$ et $z \in \ker(f-4Id)$.

2. La somme est directe. D'autre part, si $x \in \ker(f+Id)$ et si $x \in \ker(f-4Id)$, alors d'une part $f(x)=x$ et d'autre part $f(x)=-4x$, puis $x=0$.

Solution 15

$$\begin{cases} x + p(x) = b \\ p(x) + \underbrace{p(p(x))}_{=p(x)} = p(b) \end{cases} \implies \begin{cases} x = b - \frac{p(b)}{2} \\ p(x) = \frac{p(b)}{2} \end{cases} \implies x = b - \frac{p(b)}{2}.$$

Solution 16

$$\begin{cases} x + 2s(x) = b \\ s(x) + 2\,\underbrace{s(s(x))}_{=x} = s(b) \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{b}{3} - 2\frac{s(b)}{3} \\ s(x) = \frac{s(b)}{3} - 2\frac{b}{3} \end{cases} \implies x = \frac{b}{3} - 2\frac{s(b)}{3}.$$