Algèbre
Matrices – Algèbre des matrices carrées

Denis Vekemans [*]

Exercice 1 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer, lorsque cela est possible, A^2, B^2, AB, BA, A^t, B^t, AA^t, A^tA, $(A^t)^2$, BB^t, B^tB, $(B^t)^2$, A^tB^t et B^tA^t.

Exercice 2 Soient a et b des nombres réels. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB et BA. En déduire que A et B commutent.
2. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 3 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer A^2 et montrer que $A^2 + A = 2I_2$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.
3. Ecrire la matrice A^{-1}.

Exercice 4 Soit $\mathbb{K}$ un corps et soit $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que $DA = AD$ pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ si et seulement si $D = \lambda I_2$ pour un $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercice 5 Soit $\mathbb{K}$ un corps. Montrer que l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour la multiplication.

[*] Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Exercice 6 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère les applications linéaires f et g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par

$$f(x, y, z) = (x + z, 2y - z, x),$$

$$g(e_1) = e_1 + e_3, \quad g(e_2) = 2e_2 - e_3, \quad g(e_3) = e_1.$$

1. A-t-on $f = g$?
2. Donner les matrices M_f et M_g de f et g dans la base $\mathcal{B}$.
3. Donner l'image de $\mathcal{B}$ par l'application linéaire $h = 2f - g$.
4. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner les coordonnées de $h(x, y, z)$ dans la base $\mathcal{B}$.
5. En utilisant les trois questions précédentes, donner, par trois méthodes différentes, la matrice M_h de h dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 7 Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire. On pose $g = f - Id$. On suppose $g \circ g \neq 0$ et $g \circ g \circ g = 0$.

1. Soit $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $(g \circ g)(v) \neq 0$. Montrer que les vecteurs $v, g(v), (g \circ g)(v)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice M_g de g, puis la matrice M_f de f dans cette base.

Exercice 8 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\phi(e_1) = 0, \quad \phi(e_2) = e_1 - e_2 - e_3, \quad \phi(e_3) = -e_1 + e_2 + e_3.$$

1. Ecrire la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Trouver une base de $\ker(\phi)$ et une base de $\mathrm{Im}(\phi)$.
3. Trouver un vecteur v de $\mathbb{R}^3$ tel que $\phi(v) \neq 0$ et montrer qu'alors la famille $(v, \phi(v))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
4. Trouver un vecteur w de $\ker(\phi)$ tel que la famille $\mathcal{F} = (v, \phi(v), w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
   Ecrire la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{F}$.

Exercice 9 Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est bijectif et déterminer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
2. On pose $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_1 + e_2 - e_3$ et $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer A' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
   (c) Donner la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   (d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11 Soit $\mathbb{K}$ un corps. On définit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la relation $\sim$ par

$$A \sim B \Longleftrightarrow \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \text{inversible},\ A = P^{-1}BP.$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Exercice 12 Juin 2005.

Pour tout nombre réel m, on considère la matrice $A(m) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & m \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer pour quelles valeurs de m la matrice $A(m)$ est inversible.
2. Déterminer le rang de la matrice $A(m)$ en fonction du paramètre m.

Exercice 13 Soit $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
2. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 14 On considère la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $M^n = a_n M + b_n I_3$.

Expliciter $a_n \in \mathbb{R}$ et $b_n \in \mathbb{R}$.

Exercice 15 Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $U^tU = ||U||_2^2 = 1$.

1. Montrer que $S = I_n - 2UU^t$ est une matrice symétrique telle que $S^2 = I_n$, en déduire que S est inversible et calculer S^{-1}.
2. Montrer que $P = I_n - UU^t$ est une matrice symétrique telle que $P^2 = P$. Montrer que P n'est jamais inversible.

Exercice 16 Soient A et B des matrices carrées de taille n telles que $I_n - AB$ soit inversible.

Calculer $(I_n - BA)(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A)$. $I_n - BA$ est-elle inversible ?

Exercice 17 Soit $A = (a_{i,j})_{i\in\{1,\dots,n\},j\in\{1,\dots,n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On définit la trace de A que l'on note $tr(A)$ comme égale à la somme des éléments de la diagonale principale. On a donc

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

1. Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$tr(\lambda A + \mu B) = \lambda tr(A) + \mu tr(B)\ ;\ tr(AB) = tr(BA).$$

2. Calculer $tr(A^tA)$ en fonction des coefficients de A.

Exercice 18 Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = BX$.

Exercice 19 Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $\phi : P(X) \longmapsto XP'(X) - \frac{1}{2}P$.

Donner la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 20 On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 ($\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$), ce qui revient à dire qu'on peut se donner $z = a + \imath b \in \mathbb{C}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{B}_1 = \{1, \imath\}$ la base canonique de $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. On écrit z dans la base $\mathcal{B}_1$: $z_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

On pose $\jmath = -\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Vérifier que $1 + \jmath + \bar{\jmath} = 0$.

Soit $\mathcal{B}_2 = \{1, \jmath\}$ une autre base de $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

2. Ecrire z dans la base $\mathcal{B}_2$ (i.e. $z_{\mathcal{B}_2} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$) et donner $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ telle que $z_{\mathcal{B}_2} = A\ z_{\mathcal{B}_1}$. Donner $B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ telle que $z_{\mathcal{B}_2} = B\ z_{\mathcal{B}_1}$.

Soit c l'endomorphisme de $\mathbb{C}$ qui à $z \in \mathbb{C}$ associe son conjugué $\overline{z} \in \mathbb{C}$.
Soit $C_{\mathcal{B}_1} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ la matrice associée à l'endomorphisme c dans la base $\mathcal{B}_1$.

3. Donner la matrice $C_{\mathcal{B}_1}$.

Soit $C_{\mathcal{B}_2} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ la matrice associée à l'endomorphisme c dans la base $\mathcal{B}_2$.

4. Donner la matrice $C_{\mathcal{B}_2}$.
5. Donner en justifiant (par des calculs ou non), l'existence de l'inverse de la matrice B, la matrice B^{-1} et la matrice $B^{-1}C_{\mathcal{B}_1}B$.

Références

[1] M. Gran, *fiches de TD (L1)*, Université du Littoral Côte d'Opale.

[2] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 1. Algèbre*, Belin, Collection DIA, 1987.

[3] D. Duverney, S. Heumez, G. Huvent, *Toutes les mathématiques – Cours, exercices corrigés – MPSI, PCSI, PTSI, TSI*, Ellipses, 2004.