EXAMEN – ALGEBRE

Université du Littoral Côte d'Opale

Question de cours Soient V et W deux espaces vectoriels sur un corps commutatif $\mathbb{K}$.

1. Rappeler la définition d'une application $\mathbb{K}$-linéaire $L\colon V \longrightarrow W$.

   L est linéaire si

$$\forall u \in V,\ \forall v \in V,\ \forall \mu \in \mathbb{K},\ \forall \nu \in \mathbb{K},\ L(\mu u + \nu v) = \mu L(u) + \nu L(v).$$

2. Rappeler les définitions du noyau $\ker(L)$ de L et de l'image $\mathrm{Im}(L)$ de L.

$$\ker(L) = \{u \in V \text{ tel que } L(u) = 0_W\}.$$

$$\mathrm{Im}(L) = \{v \in W \text{ tel que } \exists u \in V \text{ où } L(u) = v\}.$$

3. Montrer $\ker(L)$ est un sous-espace vectoriel de V.

   $\ker(L) \subset V$ (trivial) et $\forall u \in \ker(L),\ \forall v \in \ker(L),\ \forall \mu \in \mathbb{K},\ \forall \nu \in \mathbb{K},\ \mu u + \nu v$ est tel que $L(\mu u + \nu v) = \mu \underbrace{L(u)}_{=0_W} + \nu \underbrace{L(v)}_{=0_W} = 0_W$ et $\mu u + \nu v$ est donc dans $\ker(L)$, ce qui montre que $\ker(L)$ est un sous-espace vectoriel de V.

4. Montrer que $\mathrm{Im}(L)$ est un sous-espace vectoriel de W.

   $\mathrm{Im}(L) \subset W$ (trivial) et $\forall v_1 \in \mathrm{Im}(L),\ \forall v_2 \in \mathrm{Im}(L),\ \forall \mu \in \mathbb{K},\ \forall \nu \in \mathbb{K}$, il existe $u_1 \in V$ tel que $L(u_1) = v_1$ et il existe $u_2 \in V$ tel que $L(u_2) = v_2$, puis, par conséquent, il existe $\mu u_1 + \nu u_2 \in V$ tel que $L(\mu u_1 + \nu u_2) = \mu \underbrace{L(u_1)}_{=v_1} + \nu \underbrace{L(u_2)}_{=v_2} = \mu v_1 + \mu v_2$ et $\mu v_1 + \mu v_2$ est donc dans $\mathrm{Im}(L)$, ce qui montre que $\mathrm{Im}(L)$ est un sous-espace vectoriel de V.

Exercice 1 Soient E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E et $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ une partie de E. Montrer que si $\{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\}$ est libre, alors $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ est libre. La réciproque est-elle juste ? Justifier.

Solution 1 $\forall a_1 \in \mathbb{K}$, $\forall a_2 \in \mathbb{K}$, ..., $\forall a_n \in \mathbb{K}$, si $a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n = 0$, alors $f(a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n) = f(0) = 0$, puis $a_1f(u_1) + a_2f(u_2) + \ldots + a_nf(u_n) = 0$ (car f est linéaire), et enfin $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ (car $\{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\}$ est libre). Ainsi, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ est libre.

La réciproque est évidemment fausse : il suffit de considérer $f \equiv 0$.

Exercice 2 Soit $E = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels à deux lignes et deux colonnes. On considère le sous-ensemble A de E :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b+a & 0 \end{pmatrix} \; ; \; a \in \mathbb{R},\; b \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de E.
2. Quelle est la dimension de A ? Justifier. Donner une base $\mathcal{B}$ de A.

Solution 2

1. $A \subset E$ (trivial).

   $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \mu \in \mathbb{R},\ \forall \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1+a_1 & 0 \end{pmatrix} \in A,\ \forall \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2+a_2 & 0 \end{pmatrix} \in A$, on a

   $$\begin{aligned} \lambda \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1+a_1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2+a_2 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\lambda a_1 + \mu a_2) & -(\lambda b_1 + \mu b_2) \\ (\lambda b_1 + \mu b_2) + (\lambda a_1 + \mu a_2) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b+a & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

   avec $a = \lambda a_1 + \mu a_2$ et $b = \lambda b_1 + \mu b_2$, qui est donc dans A.

   Ceci montre que A est un sous-espace vectoriel de E.

2.
   $$\begin{aligned} A &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b+a & 0 \end{pmatrix} \; ; \; a \in \mathbb{R},\; b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; a \in \mathbb{R},\; b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

   Montrons que la famille $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est libre.

   $$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \mu \in \mathbb{R},\ \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \lambda+\mu & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   induit aisément que $\lambda = \mu = 0$. Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de A, donc une base de A, de dimension 2 (nombre d'éléments de la base).

Exercice 3 Soit $T \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ la matrice de Vandermonde définie par trois réels a, b, c :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.$$

Par des opérations sur les lignes, montrer que $det(T) = (b-a)(c-a)(c-b)$.

Solution 3 L_i désigne la $i$ème ligne.

$$\begin{aligned}
det(T) &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \text{ en remplaçant } L_2 \text{ par } L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \text{ par } L_3 - L_1 \\
&= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} \text{ en mettant en facteur } (b-a) \text{ dans } L_2 \text{ et } (c-a) \text{ dans } L_3 \\
&= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} \text{ en remplaçant } L_3 \text{ par } L_3 - L_2 \\
&= (b-a)(c-a)(c-b).
\end{aligned}$$

Exercice 4 Soit m un réel et $A(m) \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de la matrice $A(m)$ en fonction du paramètre m.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel m pour que la matrice $A(m)$ soit inversible.
3. Quand cette condition est vérifiée, trouver l'unique solution $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ du système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

   où a, b, c sont trois réels fixés.

Solution 4 L_i désigne la $i$ème ligne.

1. Calcul du déterminant de $A(m)$:

$$\begin{aligned}
det(A(m)) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \text{ en remplaçant } L_2 \text{ par } L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \text{ par } L_3 - L_1 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2m-1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \text{ en remplaçant } L_2 \text{ par } L_2 - (m-1)L_3 \\
&= 1 - 2m.
\end{aligned}$$

– Premier cas : $m \neq \frac{1}{2}$. La matrice $A(m)$ est inversible et son rang est 3.
– Deuxième cas : $m = \frac{1}{2}$.

$$\operatorname{Im}(A(\frac{1}{2})) = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
\iff &\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = a \\ x + \frac{y}{2} + 2z = b \\ x + 2y - z = c \end{array} \right. \\
\iff &\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = a \\ -\frac{y}{2} + z = b - a \text{ en remplaçant } L_2 \text{ par } L_2 - L_1 \\ y - 2z = c - a \text{ en remplaçant } L_3 \text{ par } L_3 - L_1 \end{array} \right. \\
\iff &\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = a \\ -\frac{y}{2} + z = b - a \\ 0 = -3a + 2b + c \text{ en remplaçant } L_3 \text{ par } L_3 + 2L_2 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Im}(A(\frac{1}{2})) = \{(a, b, 3a - 2b) \in \mathbb{R}^3\} = \langle (1, 0, 3), (0, 1, -2) \rangle$.
La matrice $A(m)$ est donc de rang 2.

2. Question déjà traitée : il s'agit du cas où $m \neq \frac{1}{2}$.

3. Lorsque $m \neq \frac{1}{2}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 + mx_2 + 2x_3 = b \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ (m-1)x_2 + x_3 = b - a \text{ en remplaçant } L_2 \text{ par } L_2 - L_1 \\ x_2 - 2x_3 = c - a \text{ en remplaçant } L_3 \text{ par } L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ (2m-1)x_3 = (m-2)a + b - (m-1)c = \text{ en remplaçant } L_2 \text{ par } L_2 - (m-1)L_3 \\ x_2 - 2x_3 = c - a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_3 = \frac{(m-2)a+b-(m-1)c}{2m-1} \\ x_2 = \frac{-3a+2b+c}{2m-1} \\ x_1 = \frac{(m+4)a-3b+(m-2)c}{2m-1} \end{cases} .$$

Exercice 5 Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (7x + 2y, -4x + y).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner la matrice A de f relativement à la base canonique $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$.
3. Soient deux vecteurs $\vec{v_1} = (1, -2)$ et $\vec{v_2} = (1, -1)$. Montrer que $\mathcal{B}' = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Exprimer les vecteurs $f(\vec{v_1})$ et $f(\vec{v_2})$ dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Donner la matrice B de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.
5. Donner la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   Calculer l'inverse P^{-1} de la matrice P.
6. Soit n un entier naturel non nul. Rappeler la formule qui lie les matrices A, B et P. Calculer A^n.

Solution 5

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \mu \in \mathbb{R},\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(\underbrace{\lambda(x, y) + \mu(x', y')}_{=(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')}) &= (7(\lambda x + \mu x') + 2(\lambda y + \mu y'), -4(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y')) \\ &= \lambda(7x + 2y, -4x + y) + \mu(7x' + 2y', -4x' + y') \\ &= \lambda f(x, y) + \mu f(x', y'), \end{aligned}$$

ce qui démontre qur f est linéaire.

2. Il est immédiat (les colonnes contiennent les vecteurs de l'image des vecteurs de $\mathcal{B}$ par f exprimés dans $\mathcal{B}$) que :
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$
Remarque : on a $f(\vec{e_1}) = (7, -4)$ et $f(\vec{e_1}) = (2, 1)$.

3. Les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ forment une base si et seulement s'ils sont libres (théorème de la dimension).
$\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \forall\mu \in \mathbb{R}, \lambda\vec{v_1} + \mu\vec{v_2} = \vec{0}$ induit $(1)\ :\ \lambda + \mu = 0$ et $(2)\ :\ -2\lambda - \mu = 0$, puis $-(2) - (1)\ :\ \lambda = 0$ et $2(1) + (2)\ :\ \mu = 0$, ce qui induit que les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont libres.
$f(\vec{v_1}) = f(\vec{e_1} - 2\vec{e_2}) = f(\vec{e_1}) - 2f(\vec{e_2}) = (7, -4) - 2(2, 1) = (3, -6) = 3\vec{v_1}$.
$f(\vec{v_2}) = f(\vec{e_1} - \vec{e_2}) = f(\vec{e_1}) - f(\vec{e_2}) = (7, -4) - (2, 1) = (5, -5) = 5\vec{v_2}$.

4. Il est immédiat (les colonnes contiennent les vecteurs de l'image des vecteurs de $\mathcal{B}'$ par f exprimés dans $\mathcal{B}'$) que :
$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Il est immédiat (les colonnes contiennent les vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans $\mathcal{B}$) que :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$
Par exemple par la méthode du pivot de Gauss, on trouve :
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. On rappelle : $B = P^{-1}AP$ ou $A = PBP^{-1}$.
Puis, $A^n = \underbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})\dots(PBP^{-1})}_{n \text{ fois}} = PB^nP^{-1}$.
$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3^n + 2\cdot 5^n & -3^n + 5^n \\ 2\cdot 3^n - 2\cdot 5^n & 2\cdot 3^n - 5^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$