EXAMEN – ALGEBRE

Université du Littoral Côte d'Opale

Mercredi 17 juin 2009, 9h-12h

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (incluant le téléphone portable, la calculatrice, ...) est rigoureusement interdit.

Question de cours Soient E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{R}$.

Soient $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ et $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ deux familles d'éléments de E.

On note $\langle \mathcal{F} \rangle$ l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$ et $\langle \mathcal{G} \rangle$ l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{G}$.

1. (a) Donner la définition de "$\mathcal{F}$ est génératrice de E".
   (b) Donner la définition de "$\mathcal{F}$ est libre dans E".
   (c) Comment appelle-t-on une "famille libre et génératrice de E" ?
2. $\langle \mathcal{F} \rangle$ et $\langle \mathcal{G} \rangle$ sont "supplémentaires dans E" s'écrit : $E = \langle \mathcal{F} \rangle \bigoplus \langle \mathcal{G} \rangle$.
   Donner la définition de cette notion.

Application. $E = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{F} = \{(1, 1, 1)\}$ et $\mathcal{G} = \{(1, 1, -1), (1, -1, 1)\}$.
Montrer que $\langle \mathcal{F} \rangle$ et $\langle \mathcal{G} \rangle$ sont "supplémentaires dans E".

Exercice 1

1. En détaillant les étapes du calcul, donner la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -6 & 24 \\ 1 & -6 & 24 & -120 \\ -1 & 24 & -120 & 720 \end{vmatrix}.$$

2. En détaillant les étapes du calcul, donner l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 L'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ est connu comme étant un espace vectoriel de dimension 3 sur le corps $\mathbb{R}$ dont on connaît une base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$.

On considère l'ensemble

$$E = \{P(X) \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } P(-1) = P(1)\}.$$

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner une base de E (sans justification).

On considère alors l'application f de E dans $\mathbb{R}$ qui à $P(X)$ associe $P'(0)$ (remarque : P' est le polynôme dérivé de P).

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner successivement $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Énoncer le théorème de la dimension et le vérifier pour f.

Exercice 3 On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$ et de la base $\mathcal{B}' = \{\vec{u} = (-1,1,1), \vec{v} = (2,1,1), \vec{w} = (0,-1,1)\}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement à la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$A = mat(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$, $f(\vec{w})$. En déduire $D = mat(f, \mathcal{B}')$ la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}'$.
2. Donner P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et vérifier que son inverse P^{-1} est
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
3. Calculer AP et PD. En déduire une expression de A utilisant D, P et P^{-1}.
4. Calculer A^n pour tout entier naturel n.