Université du Littoral Côte d'Opale — Année 2009/2010
Licence Informatique et Mathématiques, 1ère année — Semestre 2, Session 1

Examen d'Algèbre
Mercredi 19 mai 2010
Durée : 3 heures. Sans document, ni calculatrice.

Questions de cours :

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Soit $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ une famille de vecteurs de E.
   (a) Compléter la définition : « La famille $\mathcal{A}$ est une famille génératrice de $E \Leftrightarrow \dots$ »
   Dans ce cas, que peut-on dire de l'entier $k = \operatorname{Card} \mathcal{A}$ par rapport à $n = \dim E$?
   (b) Si possible, donner un exemple de famille génératrice de $\mathbf{R}^3$ comprenant quatre vecteurs.
2. Soit F un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ et $f : E \to F$ une application.
   (a) Donner la définition de « f est une application linéaire de E dans F ». On suppose ces conditions réalisées.
   (b) Définir le noyau $\operatorname{Ker} f$ de f.
   (c) Donner une condition sur $\operatorname{Ker} f$ pour que l'application f soit injective. Justifier.
   (d) Définir le rang de f. Quel lien y a-t-il entre le rang de f et la dimension de $\operatorname{Ker} f$?
3. On considère l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices réelles carrées de taille n.
   (a) Définir la matrice identité, notée I_n, de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   Que représente I_n pour l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$?
   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Donner la définition de : « A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ».
   (c) Dans cette question, $n = 3$. La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Vrai-Faux :

Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, justifier brièvement. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

1. Si une famille $\{u, v, w\}$ d'éléments d'un espace vectoriel réel E est liée, alors l'un des vecteurs u, v, w est colinéaire à l'un des deux autres.
2. Si l'un des vecteurs u, v, w d'une famille $\{u, v, w\}$ d'éléments d'un espace vectoriel réel E est colinéaire à l'un des deux autres, alors la famille $\{u, v, w\}$ est liée.
3. L'anneau des matrices carrées de taille 2, $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, est un anneau intègre.
4. Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, alors $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Tournez, s'il vous plaît

Exercice 1 :
1) On considère l'ensemble

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = z = t = 0\}.$$

Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$. En donner une base et la dimension.
2) On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^4$ défini par

$$F = \{(a, a + b, -a + c, c) \mid (a, b, c) \in \mathbf{R}^3\}.$$

Donner une base et la dimension de F.
3) Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

Exercice 2 :
On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathbf{R}^3$. On note usuellement $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E.
1) Rappeler explicitement les vecteurs e_1, e_2 et e_3.

On s'intéresse à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$.

2) Déterminer l'image par f d'un vecteur quelconque $u = (x, y, z)$ de $\mathbf{R}^3$.
3) Soit $w = (3, 0, 1) \in E$.
Vérifier que le vecteur w admet un unique antécédent par f, que l'on déterminera.

4) *Propriétés de l'endomorphisme f :*
   a. Déterminer une base du noyau de f.
   b. En déduire le rang de f et une base de $\operatorname{Im} f$.

5) Soient $v_1 = (1, 1, 1)$ et $v_2 = (1, -1, 0)$.
Montrer que l'on peut compléter $\{v_1, v_2\}$ par un vecteur v_3 choisi dans $\mathcal{C}$ pour former une base de $\mathbf{R}^3$.
6) On note B la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, e_1\}$.
Déterminer la matrice B.
7) Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}.
En déduire explicitement l'endomorphisme f^{-1}.
8) En déduire que B est inversible et donner l'expression de B^{-1} en fonction de A^{-1}.
(On ne demande pas de calculer explicitement B^{-1}).

Exercice 3 :
On rappelle que pour toute matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, on pose $B^0 = I_3$ et pour tout entier naturel n, $B^{n+1} = B \times B^n = B^n \times B$.
On considère les deux matrices

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer les produits ML et LM. Que peut-on en déduire pour ces deux matrices ?
2) Calculer L^2 et M^2.
En déduire, par récurrence, l'expression des matrices L^n et M^n pour tout entier naturel n non nul.
3) On considère la matrice $A = L + M$.
   a. Déterminer la matrice A.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$A^n = 3^{n-1}L + (-3)^{n-1}M.$$

4) **Une application**
On considère trois suites numériques (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, v_0 = 0 \text{ et } w_0 = 0 \\ \text{pour tout entier } n \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n - w_n \\ v_{n+1} = u_n - 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = -3u_n + 3v_n \end{cases} \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
   a. Préciser le vecteur colonne X_0.
   b. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $X_n = A^n X_0$.
   c. En déduire, pour un entier n fixé, les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de n.
   d. Préciser les valeurs de u_4, v_5 et w_6.