Exercice 1 :
1) On considère l'ensemble $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = z = t = 0\}$.
Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$. En donner une base et la dimension.
2) On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^4$ défini par

$$F = \{(a, a + b, -a + c, c) \mid (a, b, c) \in \mathbf{R}^3\}.$$

Donner une base et la dimension de F.
3) Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

---

1) L'ensemble $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = z = t = 0\}$ est inclus dans $\mathbf{R}^4$ par définition, il est non vide (E contient $0_{\mathbf{R}^4} = (0, 0, 0, 0)$ car $0 + 0 = 0 = 0$) et il est stable par combinaison linéaire.
En effet, soient $u = (x, y, z, t) \in E$, $v = (x', y', z', t') \in E$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$.
Par définition de E, il s'ensuit que $x + y = z = t = 0$ et $x' + y' = z' = t' = 0$.
Alors $\alpha u + \beta v = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z', \alpha t + \beta t') \in \mathbf{R}^4$ et $\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' = \alpha(x+y)+\beta(x'+y') = \alpha z+\beta z' = \alpha t+\beta t' = 0+0 = 0$ car $u \in E$ et $v \in E$. Donc $\alpha u+\beta v \in E$.
On peut conclure que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

Caractérisation d'un élément de E :
Un élément $u = (x, y, z, t) \in E$ si et seulement si $y = -x$ et $z = t = 0$.
Donc $u = (x, -x, 0, 0) = x(1, -1, 0, 0) \in \langle\{u_1 = (1, -1, 0, 0)\}\rangle$.
Donc $E = \langle\{u_1\}\rangle$, autrement dit $\{u_1\}$ est une famille génératrice de E.
Par ailleurs, la famille $\{u_1\}$ est libre dans $\mathbf{R}^4$, car elle est composée d'un seul vecteur *non nul* de $\mathbf{R}^4$.
Cela signifie que $\{u_1\}$ est une base de E et que $\dim_{\mathbf{R}} E = 1$.

2) Pour déterminer une base de F, caractérisons un élément quelconque de F.
Un élément v appartient à F si et seulement si il existe $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tel que

$$v = (a, a + b, -a + c, c) = a(1, 1, -1, 0) + b(0, 1, 0, 0) + c(0, 0, 1, 1).$$

On pose : $u_2 = (1, 1, -1, 0)$, $u_3 = e_2 = (0, 1, 0, 0)$ et $u_4 = (0, 0, 1, 1)$.
Tout élément de F est une combinaison linéaire des vecteurs u_2, u_3 et u_4, donc $F = \langle\{u_1, u_2, u_3\}\rangle$, autrement dit $\{u_2, u_3, u_4\}$ est une famille génératrice de F.
Par ailleurs, on vérifie que la famille $\{u_2, u_3, u_4\}$ est libre dans $\mathbf{R}^4$ en considérant une combinaison linéaire nulle de ses trois éléments : soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tel que $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0_{\mathbf{R}^4}$.
Donc $(a, a + b, -a + c, c) = (0, 0, 0, 0)$, soit $a = c = b = 0$.
Cela signifie que $\{u_2, u_3, u_4\}$ est libre.
On peut en conclure que $\{u_2, u_3, u_4\}$ est une base de F et que $\dim_{\mathbf{R}} F = 3$.

3)
- Déterminons $E \cap F$:
  Soit $u \in E \cap F$. Comme $u \in F$, il existe $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tel que $u = (a, a + b, -a + c, c)$.
  Comme $u \in E$, $a + (a + b) = -a + c = c = 0$, soit encore $a = b = c = 0$.
  Donc $u = 0_{\mathbf{R}^4}$.
  On en déduit que $E \cap F = \{0_{\mathbf{R}^4}\}$ (et par conséquent, $\dim_{\mathbf{R}} E \cap F = 0$).

– Déterminons $E+F$:
$\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E\cap F) = 1+3-0 = 4 = \dim \mathbf{R}^4$ et $E+F \subset \mathbf{R}^4$, comme sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$. Donc $E+F = \mathbf{R}^4$.

On peut conclure des deux derniers résultats que

$$E \oplus F = \mathbf{R}^4.$$

Exercice 2 :
On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathbf{R}^3$. On note usuellement $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E.
1) Rappeler explicitement les vecteurs e_1, e_2 et e_3.

On s'intéresse à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$.

2) Déterminer l'image par f d'un vecteur quelconque $u = (x, y, z)$ de $\mathbf{R}^3$.
3) Soit $w = (3, 0, 1) \in E$.
Vérifier que le vecteur w admet un unique antécédent par f, que l'on déterminera.

4) *Propriétés de l'endomorphisme f :*
   a. Déterminer une base du noyau de f.
   b. En déduire le rang de f et une base de $\operatorname{Im} f$.

5) Soient $v_1 = (1, 1, 1)$ et $v_2 = (1, -1, 0)$.
Montrer que l'on peut compléter $\{v_1, v_2\}$ par un vecteur v_3 choisi dans $\mathcal{C}$ pour former une base de $\mathbf{R}^3$.
6) On note B la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, e_1\}$.
Déterminer la matrice B.
7) Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}.
En déduire explicitement l'endomorphisme f^{-1}.
8) En déduire que B est inversible et donner l'expression de B^{-1} en fonction de A^{-1}.
(On ne demande pas de calculer explicitement B^{-1}).

---

1) On rappelle l'expression des vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^3$:

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0) \quad \text{et} \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

2) *Déterminons explicitement l'endomorphisme f.*
1ère méthode :
D'après la matrice A, on a : $f(e_1) = e_1 + e_3$, $f(e_2) = e_2 + e_3$ et $f(e_3) = e_1 + e_2$.
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Donc $f(u) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = x(e_1 + e_3) + y(e_2 + e_3) + z(e_1 + e_2) = (x+z)e_1 + (y+z)e_2 + (x+y)e_3 = (x+z, y+z, x+y)$.

2ème méthode :
Soit $u=(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ et U le vecteur colonne représentant u dans la base $\mathcal{C}$. Le vecteur $f(u)$ est alors représenté, dans $\mathcal{C}$, par $A.U=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+z\\y+z\\x+y\end{pmatrix}$.

On retrouve le résultat précédent : $f: \begin{array}{rcl}\mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3\\ (x,y,z) & \mapsto & (x+z,y+z,x+y).\end{array}$

3) Soit $w=(3,0,1)$. On cherche s'il existe $v=(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ tel que $f(v)=w$, c'est-à-dire tel que $(x+z,y+z,x+y)=(3,0,1)$.
Or, $\begin{cases}x+ \quad +z &=3\\ \quad y+z &=0\\ x+y &=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-z\\ y=-z\\ 3-2z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-z=3-1=2\\ y=-z=-1\\ z=1\end{cases}$
Comme le système admet une solution et une seule, on en déduit que le vecteur $v=(2,-1,1)$ est l'unique antécédent de w par f.
Remarque : on n'oublie pas de vérifier que $f(2,-1,1)=(3,0,1)$!

4a) *Noyau de f :*
$u=(x,y,z)\in\operatorname{Ker} f\Leftrightarrow f(u)=(x+z,y+z,x+y)=(0,0,0)\Leftrightarrow x=y=z=0\Leftrightarrow u=0_{\mathbf{R}^3}$.
On en déduit que $\operatorname{Ker} f=\{0_{\mathbf{R}^3}\}$, donc f est un endomorphisme injectif de l'espace $\mathbf{R}^3$.
b) D'après le théorème du rang,

$$\operatorname{rang} f=\dim\mathbf{R}^3-\dim\operatorname{Ker} f=3-0=3.$$

On sait que $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$, de dimension $\operatorname{rang} f=3=\dim\mathbf{R}^3$. Cela signifie que $\operatorname{Im} f=\mathbf{R}^3$.
L'endomorphisme f est donc bijectif : c'est un automorphisme de $\mathbf{R}^3$.

5) Il est clair que les vecteurs $v_1=(1,1,1)$ et $v_2=(1,-1,0)$ ne sont pas colinéaires, donc la famille $\{v_1,v_2\}$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ de dimension 3. D'après le théorème de la base incomplète, on sait que toute famille *libre* de deux vecteurs d'un espace de dimension trois peut être complétée en une base de cet espace, en y adjoignant un vecteur de telle sorte que la famille de 3 vecteurs ainsi obtenue soit encore libre.
On vérifie que la famille $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,e_1\}$ par exemple est libre : soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbf{R}^3$ tel que $\alpha v_1+\beta v_2+\gamma e_1=0_{\mathbf{R}^3}$.
On a donc : $(\alpha+\beta+\gamma,\alpha-\beta,\alpha)=0_{\mathbf{R}^3}$, soit $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma &=0\\ \alpha-\beta &=0\\ \alpha &=0\end{cases}\Leftrightarrow\alpha=\beta=\gamma=0.$
On en déduit que $\mathcal{B}$ est une famille libre de cardinal 3 et par suite, c'est une base de $\mathbf{R}^3$.

6) *Déterminons la matrice de f dans la base $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,e_1\}$.*
1ère méthode :
On a : $f(v_1)=f(1,1,1)=(2,2,2)=2v_1$, $f(v_2)=f(1,-1,0)=(1,-1,0)=v_2$ et $f(e_1)=f((1,0,0)=(1,0,1)=v_1+v_2-e_1$.
Donc $\mathcal{MAT}_{\mathcal{B}}(f)=B=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

2ème méthode :
D'après la formule de changement de base : $B = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.
On obtient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7) *Inversibilité et inverse de la matrice A*
On calcule le déterminant de la matrice A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

en remplaçant L_3 par $L_3 - L_1$. Donc, en développant par rapport à la première colonne, $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. On en déduit que la matrice A est inversible. Par le calcul, on obtient la matrice A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque : on n'oublie pas de vérifier que : $AA^{-1} = I_3$.

Déterminons l'endomorphisme f^{-1}
Puisque A est la matrice de f dans $\mathcal{C}$, la matrice de f^{-1} dans la **même** base $\mathcal{C}$ est A^{-1}. Comme à la question 2), on en déduit que : $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & \frac{1}{2}(x - y + z, -x + y + z, x + y - z). \end{array}$

8) *Inversibilité de la matrice B :*
On sait que la matrice d'une application linéaire *bijective* est inversible. C'est donc le cas de la matrice B, qui est la matrice de l'automorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.

D'après la question 6), on a : $B = P^{-1}AP$, où P désigne la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.
On en déduit que

$$B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P.$$

Exercice 3 :
On rappelle que pour toute matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, on pose $B^0 = I_3$ et pour tout entier naturel n, $B^{n+1} = B \times B^n = B^n \times B$.
On considère les deux matrices

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer les produits ML et LM. Que peut-on en déduire pour ces deux matrices ?
2) Calculer L^2 et M^2.
En déduire, par récurrence, l'expression des matrices L^n et M^n pour tout entier naturel n non nul.
3) On considère la matrice $A = L + M$.
   a. Déterminer la matrice A.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$A^n = 3^{n-1}L + (-3)^{n-1}M.$$

4) **Une application**
On considère trois suites numériques (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, v_0 = 0 \text{ et } w_0 = 0 \\ \text{pour tout entier } n \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n - w_n \\ v_{n+1} = u_n - 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = -3u_n + 3v_n \end{cases} \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
   a. Préciser le vecteur colonne X_0.
   b. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $X_n = A^n X_0$.
   c. En déduire, pour un entier n fixé, les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de n.
   d. Préciser les valeurs de u_4, v_5 et w_6.

---

1) Un simple calcul permet de voir que $LM = ML = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbf{R})}$, ce qui signifie que les deux matrices M et L commutent.
2) De même, le calcul donne :

$$L^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3L \qquad \text{et} \qquad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} = -3M.$$

Montrons, par récurrence, que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, $L^n = 3^{n-1}L$.
Initialisation : On a bien : $3^{1-1}L = 1 \times L = L$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
Hérédité : montrons que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, si $L^n = 3^{n-1}L$, alors $L^{n+1} = 3^nL$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. On suppose que $L^n = 3^{n-1}L$.
D'après le calcul précédent, on sait que $L^2 = 3L$.
Alors $L^{n+1} = L^n \times L = 3^{n-1}L \times L = 3^{n-1}L^2 = 3^{n-1} \times 3L = 3^n L$.

Conclusion : Par récurrence, on a prouvé que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, $L^n = 3^{n-1}L$.

Un raisonnement similaire – en remplaçant 3 par (-3) – permettrait de démontrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, $M^n = (-3)^{n-1}M$.

3)a. D'après l'énoncé,

$$A = L + M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Puisque les matrices L et M commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer A^n :

$$A^n = (L+M)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k L^k M^{n-k}.$$

Or, pour $k \notin \{0, n\}$, on a : $L^k M^{n-k} = L^{k-1} \times (LM) \times M^{n-k-1} = L^{k-1} \times 0 \times M^{n-k-1} = 0$.

Dans la somme, il ne reste donc que deux termes non nuls : $\begin{cases} C_n^0 L^0 M^n = M^n = (-3)^{n-1}M, \text{ pour } k = 0 \\ C_n^n L^n M^0 = L^n = 3^{n-1}L, \text{ pour } k = n. \end{cases}$

Ainsi,

$$A^n = 3^{n-1}L + (-3)^{n-1}M.$$

4a) En reprenant les notations de l'énoncé, on obtient $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Soit $n \in \mathbf{N}$. On remarque que le système

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n - w_n \\ v_{n+1} = u_n - 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = -3u_n + 3v_n \end{cases} \quad \text{s'écrit encore} \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_n - v_n - w_n \\ u_n - 2v_n + w_n \\ -3u_n + 3v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix},$$

soit

$$X_{n+1} = AX_n.$$

Un simple raisonnement par récurrence permet d'en déduire que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $X_n = A^n X_0$.

c) Or, d'après les résultats des questions 3b) et 4a), le produit $A^n X_0$ est égal à

$$A^n X_0 = \begin{pmatrix} 2 \times 3^{n-1} \\ (-3)^{n-1} \\ (-2) \times 3^{n-1} + (-1) \times (-3)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{cases} u_n = 2 \times 3^{n-1} \\ v_n = (-3)^{n-1} \\ w_{n+1} = 3^{n-1}(-2 + (-1)^n) \end{cases}$$

d) Par exemple, $u_4 = 2 \times 3^3 = 2 \times 27 = 54$, $v_5 = (-3)^4 = 81$ et $w_6 = 3^5 \times (-1) = -243$.